Second Semester Examination
2017/2018 Academic Session

May/June 2018

MAT202 - Introduction to Analysis
(Pengantar Analysis)

Duration : 3 hours
(Masa : 3 jam)

Please check that this examination paper consists of SIX (6) pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi ENAM (6) muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all FOUR** (4) questions.

*[**Arahan:** Jawab **semua EMPAT** (4) soalan.]*

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

Question 1

(a) Give the statement of the Completeness Axiom for $\mathbb{R}$.

(b) Suppose that S is a nonempty bounded subset of $\mathbb{R}$. Define

$$-S = \{-s : s \in S\}.$$

Show that $\inf(S) = -\sup(-S)$, where $\inf(X)$ and $\sup(X)$ denote the infimum and supremum of X, respectively.

(c) Prove that between any two real numbers, there is an irrational number.

(d) The set of all rational numbers $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m,n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$, can be expressed in the form $\mathbb{Q} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, with $A_k = \left\{0, \frac{1}{k}, -\frac{1}{k}, \frac{2}{k}, -\frac{2}{k}, \ldots\right\}$. Define the function $f_k : \mathbb{N} \to A_k$ by

$$f_k(n) = \begin{cases} \dfrac{(n/2)}{k}, & n \text{ even;} \\ \dfrac{-(n-1)/2}{k}, & n \text{ odd.} \end{cases}$$

(i) Show that f_k is one to one and onto.

(ii) Show that $\mathbb{Q}$ is countable.

(e) Suppose that S is a nonempty set.

(i) If $f : S \to \mathbb{N}$ is one to one, show that S is countable.

(ii) If $f : \mathbb{N} \to S$ is one to one, is S countable? If yes, prove it. If not, give a counterexample.

[100 marks]

Soalan 1

(a) Berikan pernyataan untuk Aksiom Kelengkapan bagi $\mathbb{R}$.

(b) Andaikan S suatu subset tak kosong yang terbatas pada $\mathbb{R}$. *Takrifkan*

$$-S = \{-s : s \in S\}.$$

Tunjukkan bahawa $\inf(S) = -\sup(-S)$, *dengan* $\inf(X)$ *dan* $\sup(X)$ *masing-masing menandai infimum dan supremum bagi X.*

(c) Buktikan bahawa di antara sebarang dua nombor nyata, terdapat satu nombor tak nisbah.

(d) *Set nombor nisbah* $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m,n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$, *dapat diungkapkan dalam bentuk* $\mathbb{Q} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, *dengan* $A_k = \left\{0, \frac{1}{k}, -\frac{1}{k}, \frac{2}{k}, -\frac{2}{k}, \ldots\right\}$. *Takrifkan fungsi* $f_k : \mathbb{N} \to A_k$ *dengan*

$$f_k(n) = \begin{cases} \dfrac{(n/2)}{k}, & n \text{ genap;} \\ \dfrac{-(n-1)/2}{k}, & n \text{ ganjil.} \end{cases}$$

(i) *Tunjukkan bahawa* f_k *adalah satu dengan satu dan keseluruh.*

(ii) *Tunjukkan bahawa* $\mathbb{Q}$ *adalah terbilangkan.*

(e) *Andaikan S set tak kosong.*

(i) *Jika* $f : S \to \mathbb{N}$ *ialah satu dengan satu, tunjukkan bahawa S adalah terbilangkan.*

(ii) *Jika* $f : \mathbb{N} \to S$ *ialah satu dengan satu, adakah S terbilangkan? Jika benar, buktikan. Jika tidak, berikan satu contoh penyangkal.*

[100 markah]

Question 2

(a) (i) The limit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ means that for any $\varepsilon > 0$, there exists a natural number N such that $|a_n - a| < \varepsilon$ for all $n \geq N$. Show that $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ if and only if $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

(ii) Give an example which shows that a convergent sequence $\{|a_n|\}$ does not guarantee the convergence of $\{a_n\}$.

(b) Suppose $x_1 = 7$, $x_{n+1} = 7 - \dfrac{6}{x_n}$ for $n \geq 1$.

(i) Show that $x_n \geq 6$ for all $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Determine whether the sequence $\{x_n\}$ is increasing or decreasing.

(iii) Does $\lim_{n\to\infty} x_n$ exist? Give your reason. If the limit exists, find its value.

(c) Let $A = (0,1] - \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

(i) Find the interior points of A.

(ii) Find the limit points of A.

(iii) Find the isolated points of A.

(iv) Find the boundary points of A.

(v) Determine whether the set A is closed or open.

[100 marks]

Soalan 2

(a) (i) Had $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ bermaksud, untuk $\varepsilon > 0$, wujud suatu integer positif N sedemikian $|a_n - a| < \varepsilon$ untuk semua $n \geq N$. Tunjukkan bahawa $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ jika dan hanya jika $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

(ii) Berikan satu contoh yang menunjukkan bahawa penumpuan jujukan $\{|a_n|\}$ tidak semestinya menjamin penumpuan jujukan $\{a_n\}$.

(b) Andaikan $x_1 = 7$, $x_{n+1} = 7 - \dfrac{6}{x_n}$ untuk $n \geq 1$.

(i) Tunjukkan bahawa $x_n \geq 6$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Tunjukkan sama ada jujukan $\{x_n\}$ menokok atau menyusut.

(iii) Adakah $\lim_{n\to\infty} x_n$ wujud? Berikan alasan. Jika had ini wujud, carikan nilainya.

(c) Biarkan set $A = (0,1] - \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

(i) Cari titik pedalaman bagi set A.

(ii) Cari titik had bagi set A.

(iii) Cari titik terpencil bagi set A.

(iv) Cari titik sempadan bagi set A.

(v) Tentukan sama ada A terbuka atau tertutup.

[100 markah]

Question 3

(a) State the Heine-Borel Theorem for $\mathbb{R}$. Give an example of a compact set.

(b) Suppose A and B are two compact sets. Show that $A \cup B$ is also compact.

(c) Let $\{f_n\}$ be a sequence of functions converging uniformly on an interval I to a function f. If each f_n is continuous on I, then show that f is also continuous on I.

(d) Let $\{f_n\}$ be a sequence of functions, given by

$$f_n(x) = (\sin x)^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in [0, \pi].$$

(i) Find $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, if exists.

(ii) Show that the sequence $\{f_n\}$ converges uniformly on $[0, \pi/4]$ but does not converge uniformly on $[0, \pi/2]$.

(iii) Find $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x)^n dx$.

[100 marks]

Soalan 3

(a) Nyatakan Teorem Heine-Borel untuk $\mathbb{R}$. Berikan satu contoh set padat.

(b) Andaikan A dan B merupakan dua set padat. Tunjukkan bahawa $A \cup B$ juga padat.

(c) Biarkan $\{f_n\}$ suatu jujukan fungsi yang menumpu secara seragam kepada fungsi f pada suatu selang I. Jika setiap f_n adalah selanjar pada I, maka tunjukkan bahawa f juga adalah selanjar pada I.

(d) Biarkan $\{f_n\}$ suatu jujukan fungsi, ditakrifkan sebagai

$$f_n(x) = (\sin x)^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in [0, \pi].$$

(i) Cari $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, jika wujud.

(ii) Tunjukkan bahawa jujukan fungsi $\{f_n\}$ menumpu secara seragam pada $[0, \pi/4]$ tetapi tidak menumpu secara seragam pada $[0, \pi/2]$.

(iii) Cari $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x)^n dx$.

[100 markah]

Question 4

(a) Prove that if f is differentiable at a point a, then f is continuous at a. Give an example of a function which is continuous at a but is not differentiable at a.

(b) (i) State Rolle's Theorem.

(ii) Let $f(x) = (x-\pi)\cos x$. Prove that $\cot x = x - \pi$ on the interval $(\pi/2, \pi)$, using part (b)(i).

(c) Suppose that the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is continuous at 0 and

$$f(a+b) = f(a) + f(b), \quad \text{for all } a, b \in \mathbb{R}.$$

(i) Prove that $f(0) = 0$.

(ii) Show that f is continuous at each real number x.

(iii) If f is also differentiable at 0, show that $f'(x) = f'(0)$ for each $x \in \mathbb{R}$.

(d) If function $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$ and partition $P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n} \ldots, 1\right\}$ of the interval $[0,1]$, find $L(f, P_n)$ and $U(f, P_n)$. Show that $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

[100 marks]

Soalan 4

(a) Buktikan bahawa jika f terbezakan pada suatu titik a, maka f selanjar pada a. Berikan satu contoh fungsi yang selanjar pada a tetapi tak terbezakan pada a.

(b) (i) Nyatakan Teorem Rolle.

(ii) Biarkan $f(x) = (x-\pi)\cos x$. Buktikan bahawa $\cot x = x - \pi$ pada selang $(\pi/2, \pi)$ dengan menggunakan (b)(i).

(c) Andaikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ selanjar pada 0 dan

$$f(a+b) = f(a) + f(b), \quad \textit{untuk semua } a, b \in \mathbb{R}.$$

(i) Buktikan bahawa $f(0) = 0$.

(ii) Tunjukkan bahawa f selanjar pada setiap nombor nyata x.

(iii) Jika f juga terbezakan pada 0, tunjukkan bahawa $f'(x) = f'(0)$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$.

(d) Jika fungsi $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$ dan $P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n} \ldots, 1\right\}$, pada selang $[0,1]$ cari $L(f, P_n)$ dan $U(f, P_n)$. Tunjukkan bahawa $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

[100 markah]

- **ooo O ooo** -