UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination
2018/2019 Academic Session

December 2018/January 2019

MSG453 - Queuing System and Simulations
(Sistem Giliran dan Simulasi)

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of SIXTEEN (16) pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi ENAM BELAS (16) muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **THREE (3)** questions.

*[**Arahan**: Jawab **TIGA (3)** soalan.]*

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai.]

Question 1

(a) Consider an $M/M/1$ queueing model with a finite input of size M. The mean time that a customer spend outside the queueing system is $1/\lambda$ and the mean service time is $1/\mu$.

(i) Draw a rate diagram of this queueing system.

(ii) Show that the average number of customers in the queueing system is:

$$L = M - \frac{\mu}{\lambda}[1 - P_0]$$

where
$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{M} \frac{M!}{(M-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right]^{-1}$$

is the probability that the system is idle.

[30 marks]

(b) A fast food restaurant is considering operating a drive-thru window food service operation. Assume that customer arrivals follow a Poisson probability distribution, with a mean arrival rate of 24 cars per hour, and that the service times follow an exponential probability distribution. Arriving customers place orders at an intercom station at the back of the parking lot and then drive to the service window to pay for and receive their orders. The following two service alternatives are being considered.

- A single-channel operation in which one employee fills the order while a second employee takes the money from the customer. The average service time for this alternative is 1.25 minutes.
- A two-channel operation with two service windows and two employees. The employee stationed at each window fills the order and takes the money for customers arriving at the window. The average service time for this alternative is 2 minutes for each channel.

Answer the following questions for each alternative and recommend the best design for the fast food restaurant.

(i) What is the probability that no cars are in the system?

(ii) What is the average number of cars waiting for service?

(iii) What is the average number of cars in the system?

(iv) What is the average time a car waits for service?

(v) What is the average time in the system?

(vi) What is the probability that an arriving car will have to wait for service?

The following cost information is available for the fast food restaurant.

- Customer waiting time is valued at RM25 per hour to reflect the fact that waiting time is costly to the fast food business.
- The cost (salary) of each employee is RM6.50 per hour.
- To account for equipment and space, an additional cost of RM20 per hour is attributable to each channel.

(vii) What is the lowest-cost design for the fast food business?

[40 marks]

(c) Past records indicate that each of the 5 laser computer printers at the School of Mathematical Sciences, USM, needs repair after about 20 hours of use. Breakdowns have been determined to be Poisson distributed. The one technician on duty can service a printer in an average of 2 hours, following an exponential distribution. Printer downtime costs RM120 per hour. Technicians are paid RM25 per hour. Should the School hire a second technician?

[30 marks]

Soalan 1

(a) Pertimbangkan satu model giliran M/M/1 dengan input terhingga bersaiz M. Masa min seorang pelanggan berada diluar sistem giliran adalah 1/λ dan masa min layanan adalah 1/μ.

(i) Lukiskan gambar rajah kadar bagi sistem giliran ini.

(ii) Tunjukkan bahawa bilangan purata pelanggan di dalam sistem giliran adalah:

$$L = M - \frac{\mu}{\lambda}[1 - P_0]$$

dengan $$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{M} \frac{M!}{(M-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]^{-1}$$

adalah kebarangkalian bahawa sistem bersenang.

[30 markah]

(b) *Sebuah restoran makanan segera sedang menimbang untuk membuka perkhidmatan tingkap pandu-layan. Andaikan bahawa pelanggan tiba mengikut agihan Poisson dengan kadar ketibaan min 24 sejam dan masa layan adalah mengikut agihan eksponen. Pelanggan yang tiba akan memesan makanan mereka di stesen interkom yang terletak di belakang tempat meletak kereta dan kemudiannya akan memandu ke tingkap perkhidmatan untuk membayar dan menerima pesanan mereka. Dua pilihan perkhidmatan berikut sedang dipertimbangkan.*

- *Operasi satu saluran dengan seorang pekerja untuk memenuhi pesanan pelanggan dan seorang lagi pekerja untuk menerima bayaran. Masa purata layanan bagi pilihan ini adalah 1.25 minit.*

- *Operasi dua-saluran dengan dua tingkap perkhidmatan dan dua pekerja. Pekerja yang ditugaskan di setiap tingkap akan memenuhi pesanan pelanggan dan menerima bayaran. Masa purata layanan bagi pilihan ini adalah 2 minit bagi setiap saluran.*

Jawab persoalan berikut bagi setiap pilihan perkhidmatan dan cadangkan reka bentuk terbaik bagi restoran makanan segera itu.

(i) *Apakah kebarangkalian bahawa tidak ada kereta di dalam sistem?*

(ii) *Berapakah bilangan purata kereta yang sedang menunggu untuk dilayan?*

(iii) *Berapakah bilangan purata kereta di dalam sistem?*

(iv) *Berapakah masa purata sesebuah kereta menunggu untuk dilayan?*

(v) *Berapakah masa purata di dalam sistem?*

(vi) *Apakah kebarangkalian bahawa sebuah kereta yang tiba akan menunggu untuk dilayan?*

Terdapat maklumat tentang kos seperti berikut untuk restoran makanan segera tersebut.

- *Nilai masa menuggu pelanggan adalah RM25 sejam untuk menggambarkan betapa pentingnya masa menunggu dalam perniagaan makanan segera.*

- *Kos (gaji) seorang pekerja adalah RM6.50 sejam.*

- *Bagi mengambil kira peralatan dan ruang, kos tambahan sebanyak RM20 sejam dikenakan bagi setiap saluran.*

(vii) *Pilihan yang manakah merupakan reka bentuk kos paling rendah untuk restoran makanan segera itu?*

[40 markah]

(c) *Rekod yang lepas menunjukkan bahawa setiap satu daripada 5 pencetak computer laser di Pusat Pengajian Sains Matematik, USM, perlu dibaiki selepas 20 jam penggunaan. Kerosakan didapati berlaku mengikut taburan Poisson. Seorang juruteknik yang bertugas boleh membaiki pencetak dalam masa purata 2 jam, mengikut agihan eksponen. Kos ketidak-operasian pencetak adalah RM120 sejam. Juruteknik dibayar RM25 sejam. Patutkah Pusat Pengajian mengupah seorang lagi juruteknik?*

[30 markah]

Question 2

(a) At a port there are 6 unloading berths and 4 unloading crews. When all the berths are full, arriving ships are diverted to an overflow facility 20 kilo meters down the river. Ships arrive according to Poisson process with a mean of 1 every 2 hours. It takes an unloading crew, on the average, 10 hours to unload a ship, the unloading time following an exponential distribution. Find:

(i) How many ships are at the port on the average?

(ii) How long does a ship spend at the port on the average?

(iii) What is the average arrival rate at the overflow facility?

(iv) What is the probability that all crews are idle?

(v) What is the probability that an arriving ship will be able to enter the port?

(vi) What is the probability that an arriving ship will have to wait for a crew?

(vii) On average, how many ships are waiting for service in the port?

(viii) On average, how long a ship will have to wait for service?

[40 marks]

(b) The Copy Shop is open 5 days per week for copying materials that are brought to the shop. It has three identical copying machines that are run by employees of the shop. Only two operators are kept on duty to run the machines, so the third machine is a spare that is used only when one of the other machines breaks down. When a machine is being used, the time until it breaks down has an exponential distribution with a mean of 2 weeks. If one machine breaks down while the other two are operational, a service representative is called in to repair it, in which case the time required for the repair has an exponential distribution with a mean of 0.2 week. However, if a second machine breaks down before the first one has been repaired, the third machine is shut off while the two operators work together to repair this second machine quickly, in which case its repair time has an exponential distribution with a mean of only $\frac{1}{15}$ week. If the service representative finishes repairing the first machine before the two operators complete the repair of the second, the operators go back to running the two operational machines while the representative finishes the second repair, in which case the remaining repair time has an exponential distribution with a mean of 0.2 week.

(i) Letting the state of the system be the number of machines not working, construct the rate diagram for this queueing system.

(ii) Find the steady-state distribution of the number of machines not working.

(iii) What is the expected number of operators available for copying?

[30 marks]

(c) Two operations are required to repair a roof: the old roof must be removed, and then the new one must be installed. The time between the beginning of the removal of the old roof and the completion of the installation of the new roof is important because the interior of the house may be damaged if it rains during this period. This period is called the *danger period*.

Customers call at random to a roof contractor at an average rate of 12 per month (4 weeks). It takes on average 0.5 week to remove a roof and 1 week to install a new one. Both times are exponentially distributed. The contractor has two kinds of crews, a removal crew and an installation crew. When an order arrives, the customer must wait until a removal crew is available for the job to begin. After the roof has been removed, the customer enters a queue to wait for an installation crew to become available for the job to continue.

(i) Model this situation as a queueing network and draw the corresponding diagram. Show the relevant arrival and service rates for each station. Compute the minimum number of crews required for the two operations.

(ii) Compute the average danger period if the minimum number of crews is used.

[30 marks]

Question 2

(a) *Terdapat 6 pelantar memunggah dan 4 krew memunggah di sebuah pelabuhan. Apabila kesemua pelantar dipenuhi, kapal yang tiba akan dilencongkan ke tempat lain yang terletak 20 kilometer di hulu sungai. Kapal tiba mengikut proses Poisson dengan purata 1 setiap 2 jam. Satu krew pada puratanya mengambil masa 10 jam untuk memunggah sebuah kapal, dengan masa memunggah adalah mengikut agihan eksponen. Tentukan:*

(i) *Berapa banyak kapalkah yang berada di pelabuhan pada puratanya?*

(ii) *Berapa lamakah sesebuah kapal berada di pelabuhan pada puratanya?*

(iii) *Berapakah kadar purata ketibaan kapal di tempat lain yang terletak di hulu sungai?*

(iv) *Apakah kebarangkalian bahawa kesemua krew bersenang?*

(v) *Apakah kebarangkalian bahawa sesebuah kapal yang tiba berupaya memasuki pelabuhan?*

(vi) *Apakah bebarangkalian bahawa kapal yang tiba terpaksa menunggu krew?*

(vii) *Pada puratanya, berapa banyak kapalkah yang menunggu untuk dilayan?*

(viii) *Pada puratanya, berapa lamakah sesebuah kapal harus menunggu untuk dilayan?*

[40 markah]

(b) *Kedai 'Copy Shop' dibuka 5 hari seminggu untuk menyalin bahan yang dibawa ke kedai itu. Terdapat 3 mesin penyalin yang dikendalikan oleh pekerja kedai itu. Hanya dua operator ditugaskan untuk mengendali mesin-mesin itu. Oleh yang demikian, mesin ketiga adalah mesin simpanan yang digunakan hanya apabila mesin yang lain itu rosak. Apabila sesuatu mesin digunakan, masa sehingga ia mengalami kerosakan adalah mengikut taburan eksponen dengan min 2 minggu. Jika sebuah mesin rosak manakala yang dua lagi beroperasi, seorang wakil servis akan dipanggil untuk membaiki mesin itu. Masa yang diperlukan untuk membaiki adalah mengikut agihan eksponen dengan min 0.2 minggu. Walau bagaimanapun, jika mesin kedua rosak sebelum mesin pertama siap dibaiki, mesin ketiga akan ditutup dan kedua-dua operator akan sama-sama membaiki mesin yang kedua secepat mungkin. Masa untuk membaiki adalah mengikut taburan eksponen dengan min* $\frac{1}{15}$ *minggu sahaja. Jika wakil servis siap membaiki mesin pertama sebelum kedua-dua operator siap membaiki mesin kedua, operator akan kembali mengendalikan dua mesin yang beroperasi manakala wakil servis akan meneruskan pembaikan mesin kedua. Masa yang tinggal untuk membaiki adalah mengikut agihan eksponen dengan min 0.2 minggu.*

(i) *Dengan menjadikan bilangan mesin tidak beroperasi sebagai keadaan sistem, bentukkan gambar rajah kadar untuk system giliran ini.*

(ii) *Tentukan agihan keadaan mantap bagi bilangan mesin yang tidak beroperasi.*

(iii) *Berapakah bilangan jangkaan operator yang ada untuk tugas menyalin?*

[30 markah]

(c) *Dua operasi perlu dilakukan untuk membaiki bumbung: bumbung yang lama mesti dibuka dan kemudiannya bumbung yang baharu mesti dipasang. Masa di antara permulaan pembukaan bumbung yang lama sehingga persiapan pemasangan bumbung yang baharu adalah penting kerana sekiranya berlaku hujan pada masa berkenaan, bahagian dalaman rumah akan musnah. Jangka masa ini dikenali sebagai jangka masa merbahaya.*

Panggilan pelanggan yang diterima oleh sebuah kontraktor bumbung berlaku secara rawak pada kadar purata 12 sebulan (4 minggu). Masa purata untuk membuka bumbung adalah 0.5 minggu dan masa purata pemasangan bumbung yang baharu adalah 1 minggu. Kedua-dua masa itu adalah mengikut agihan eksponen. Kontraktor itu mempunyai dua jenis krew, krew membuka dan krew memasang. Apabila sesuatu pesanan tiba, pelanggan itu mestilah menunggu sehingga wujud satu krew membuka supaya kerja boleh dimulakan. Setelah bumbung siap dibuka, pelanggan itu akan memasuki satu barisan menunggu untuk menanti kewujudan satu krew memasang supaya kerja boleh diteruskan.

(i) *Modelkan situasi ini sebagai suatu rangkaian giliran dan lukiskan gambar rajah yang berkaitan. Tunjukkan kadar ketibaan dan kadar layanan bagi setiap stesyen. Tentukan bilangan minimum krew yang diperlukan oleh kedua-dua operasi.*

(ii) *Tentukan purata jangka masa merbahaya jika bilangan krew digunakan adalah pada tahap minimum.*

[30 markah]

Questions 3

(a) There is a petrol pump and a car-wash machine at a petrol station. It is estimated that 40% of customers who fill up petrol at the station will also get their car wash. Time taken for a car wash using the machine is a constant 2 minutes. The following data on customer arrivals has been gathered.

Service Time (Minutes)	Probability
1	0.20
2	0.40
3	0.30
4	0.10

Customer orders for arrive at the petrol stations according to the following distributions:

Inter-arrival Time (minutes)	Number of Occurrences
1	0.25
2	0.35
3	0.20
4	0.15
5	0.05

Perform a simulation by hand for the arrival and service of 10 cars to the petrol station. Compute the average waiting time at the petrol station and also the average waiting time at the car-wash machine. Besides that, determine the percentage idle time of the petrol pump the percentage idle time of the car wash machine. What is the maximum number of cars waiting to be washed?

(Use the enclosed two digit random number table with the first column for the inter-arrival time and the second column for determining whether to do a car wash or not and the third column for the service time)

[50 marks]

(b) A hospital has 100 patients arriving every day. Daytime is defined as 08:00 to 16:00(8 hours). 70% of the arrivals are planned and arrive at 08:00. The rest are emergies (no appointment) and arrive randomly at a daytime rate that is 5 times as high as the rest of the day. After arrival, a patient has to be examined by a doctor that has a Poisson processing rate of 2 per hour. Emergency patients have precedence (priority). 7% of emergency patients have to be examined twice (never three or more times). Draw the simulation model for this problem as if you were using the simulation software Arena. Provide explanation wherever appropriate.

[30 marks]

(c) A hospital has 100 beds available for occupancy. The interarrival time of patients is exponential with a mean value of 0.2 days. This means that 5 patients arrive per day, on average. The duration of stay of a patient in the hospital is also exponential with a mean value of 0.1 days. This means that if all beds are occupied, then 10 patients are discharged the next day, on average. If there are no available beds, no new patients are admitted until a bed becomes available.

Construct an Arena model to simulate the hospital operations. Plot the time history of the number of patients in the system

[20 marks]

Soalan 3

(a) *Terdapat pam petrol dan mesin cuci kereta di sebuah stesen minyak. Dianggarkan bahawa 40% pelanggan yang mengisi petrol di stesen juga akan mencuci kereta. Masa yang diambil untuk membasuh kereta menggunakan mesin adalah 2 minit (tetap). Data berikut mengenai ketibaan pelanggan telah dikumpulkan.*

Masa Berkhidmat (Minit)	*Kebarangkalian*
1	*0.20*
2	*0.40*
3	*0.30*
4	*0.10*

Pesanan pelanggan untuk tiba di stesen petrol mengikut taburan berikut:

Masa Lat Ketibaan (minit)	*Bilangan Kekerapan*
1	*0.25*
2	*0.35*
3	*0.20*
4	*0.15*
5	*0.05*

Lakukan simulasi tangan untuk ketibaan dan perkhidmatan 10 kereta di stesen minyak. Kirakan purata masa menunggu di stesen minyak dan juga purata masa menunggu di mesin cuci kereta. Selain itu, juga tentukan peratusan masa terbiar pam petrol itu, peratus masa yang tidak dibuang mesin pencuci kereta. Berapakah jumlah maksimum kereta yang menunggu untuk hendak dibasuh?

(Gunakan jadual nombor rawak dua digit yang dilampirkan dengan lajur pertama untuk masa antara waktu ketibaan dan lajur kedua untuk menentukan sama ada untuk mencuci kereta atau tidak dan lajur ketiga untuk masa perkhidmatan.)

[50 markah]

(b) *Seramai 100 pesakit datang ke sebuah hospital pada setiap hari. Waktu siang ditakrifkan bermula pada jam 08:00 hingga 16:00 (8 jam). 70% daripada ketibaan pesakit adalah secara temujanji dan tiba di hospital pada jam 08:00 pagi. Selebihnya merupakan kes kecemasan (tanpa temujanji) dan tiba secara rawak pada kadar siang hari iaitu 5 kali lebih tinggi daripada kadar sepanjang hari. Selepas ketibaan, seorang pesakit perlu diperiksa oleh seorang doktor yang mempunyai kadar pemprosesan Poisson sebanyak 2 per jam. Pesakit kecemasan diberi keutamaan. 7% pesakit kecemasan perlu diperiksa dua kali (tidak pernah tiga kali atau lebih). Lukiskan model simulasi untuk masalah ini seolah-olah anda menggunakan perisian simulasi Arena. Berikan penjelasan mengikut keperluan.*

[30 marks]

(c) *Sebuah hospital mempunyai 100 katil sedia untuk penginapan. Masa lat ketibaan pesakit adalah eksponen dengan nilai min 0.2 hari. Ini bermakna 5 pesakit tiba setiap hari, secara purata. Tempoh menginap seorang pesakit di hospital juga eksponen dengan nilai min 0.1 hari. Ini bermakna jika semua katil digunakan, maka 10 pesakit akan dilepaskan keesokan harinya, secara purata. Sekiranya semua katil yang sedang digunakan, tiada pesakit baru dimasukkan sehingga satu katil tersedia.*

Bina model Arena untuk mensimulasikan operasi hospital. Plot sejarah masa bilangan pesakit dalam sistem.

[20 marks]

APPENDIX 1 / *LAMPIRAN 1*

Formulas for Queueing Theory:

1. *M/M/1*:

$$\rho = \lambda / \mu$$

$$P_n = (1-\rho)\rho^n \quad \text{for } n = 0,1,2,...$$

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$W = \frac{1}{\mu-\lambda} \quad , \quad W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$P[w > t] = e^{-t/w}$$

$$P\left[w_q > t\right] = \rho e^{-t/w}$$

2. *M/M/s*:

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$$

$$P_0 = \left[\frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\frac{1}{(1-\rho)} + \sum_{n=0}^{s-1}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}\right]^{-1}$$

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{n!}P_0 & , \text{ if } 0 \le n \le s \\ \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{s!s^{n-s}}P_0 & , \text{ if } n \le s \end{cases}$$

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^s \rho}{s!(1-\rho)^2}P_0$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \quad , \quad W = W_q + 1/\mu$$

$$L = L_q + \lambda/\mu$$

$$P\left[w_q > t\right] = e^{-\mu t}\left[1 + \frac{P_0\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!(1-\rho)}\left(\frac{1-e^{\mu t(s-1-\lambda/\mu)}}{s-1-\lambda/\mu}\right)\right]$$

$$P\left[w_q > t\right] = \left[1 - P\left\{w_q = 0\right\}\right]e^{-s\mu(1-\rho)t}$$

where $P\left\{w_q = 0\right\} = \sum_{n=0}^{s-1} P_n$

APPENDIX 2 / *LAMPIRAN 2*

3. *M/M/s*: finite population of size *M*.

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{s-1} \binom{M}{n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=s}^{M} \binom{M}{n} \frac{n!}{s^{n-s} s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right]^{-1}$$

$$P_n = \begin{cases} P_0 \binom{M}{n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n & , \quad \text{if } 0 \le n \le s \\ P_0 \binom{M}{n} \left(\frac{n!}{s^{n-s} s!}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n & , \quad \text{if } s < n \le M \\ 0 & , \quad \text{if } n > M \end{cases}$$

$$L = P_0 \left[\sum_{n=0}^{s-1} n \binom{M}{n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=s}^{M} n \binom{M}{n} \frac{n!}{s^{n-s} s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right]$$

$$L_q = L - s + P_0 \sum_{n=0}^{s-1} (s-n) \binom{M}{n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

$$W = \frac{L}{\lambda(M-L)} \quad , \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda(M-L)}$$

4. *M/G/1*:

$$P_0 = 1 - \rho$$

$$L_q = \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)}$$

$$L = \rho + L_q$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \quad , \quad W = w_q + \frac{1}{\mu}$$

5. $M / E_k / 1$:

$$L_q = \frac{1+k}{2k} \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$W_q = \frac{1+k}{2k} \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$W = W_q + 1/\mu$$

$$L = \lambda W$$

APPENDIX 3 / *LAMPIRAN 3*

6. *M/M/1/k*:

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{k+1}} & (\rho \neq 1) \\ \dfrac{1}{k+1} & (\rho = 1) \end{cases}$$

For $\rho \neq 1$

$$L = \frac{\rho\left[1-(k+1)\rho^k + k\rho^{k+1}\right]}{\left(1-\rho^{k+1}\right)(1-\rho)}$$

$$L_q = L - (1-P_0) = L - \frac{\rho\left(1-\rho^k\right)}{1-\rho^{k+1}}$$

$$W = L/\lambda' \quad , \quad \lambda' = \mu\left(L - L_q\right)$$

$$W_q = W - 1/\mu = L_q/\lambda'$$

For $\rho = 1$

$$L = \frac{k}{2}$$

7. *M/M/s/k*:

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & (0 \leq n < s) \\ \dfrac{1}{s^{n-s}s!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & (s \leq n \leq k) \end{cases}$$

$$P_0 = \begin{cases} \left[\displaystyle\sum_{n=0}^{s-1}\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\,\frac{1-\left(\dfrac{\lambda}{s\mu}\right)^{k-s+1}}{1-\dfrac{\lambda}{s\mu}}\right]^{-1} & \text{for} \quad \left(\dfrac{\lambda}{s\mu} \neq 1\right) \\ \left[\displaystyle\sum_{n=0}^{s-1}\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}(k-s+1)\right]^{-1} & \text{for} \quad \left(\dfrac{\lambda}{s\mu} = 1\right) \end{cases}$$

$$L_q = \frac{P_0 (s\rho)^S \rho}{s!(1-\rho)^2}\left[1-\rho^{k-s+1} - (1-\rho)(k-s+1)\rho^{k-s}\right]$$

APPENDIX 4 / ***LAMPIRAN 4***

$$L = L_q + s - P_0 \sum_{n=0}^{s-1} \frac{(s-n)(\rho s)^n}{n!}$$

$$W = \frac{L}{\lambda'} \quad , \quad \lambda' = \lambda(1 - P_k)$$

$$W_q = W - \frac{1}{\mu}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda'}$$

8. *M/M/s/s*:

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n / n!}{\sum_{i=0}^{s} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i / i!} \quad \text{for} \quad (0 \le n \le s)$$

$$P_s = \frac{(s\rho)^s / s!}{\sum_{i=0}^{s} (s\rho)^i / i!} \quad \text{where} \quad \left(\rho = \frac{\lambda}{s\mu}\right).$$

$$L = \frac{\lambda}{\mu}(1 - P_s) \quad , \quad W = \frac{L}{\lambda'} \text{ where } \lambda' = \lambda(1 - P_s)$$

9. $M/M/\infty$:

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n e^{-\lambda/\mu}}{n!} \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$L = \lambda / \mu$$

$$W = \frac{1}{\mu}$$

APPENDIX 5 / *LAMPIRAN 5*

10. *M/M/1*: state-dependent service

$$\mu_n = \begin{cases} \mu_1 & (1 \le n \le k) \\ \mu & (n \ge k) \end{cases}$$

$$P_0 = \left[\frac{1-\rho_1^k}{1-\rho_1} + \frac{\rho \rho_1^{k-1}}{1-\rho} \right]^{-1} \quad (\rho_1 = \lambda / \mu_1, \rho = \lambda / \mu < 1)$$

$$L = P_0 \left[\frac{\rho_1 \left[1 + (k-1)\rho_1^k - k\rho_1^{k-1} \right]}{(1-\rho_1)^2} + \frac{\rho \rho_1^{k-1} \left[k - (k-1)\rho \right]}{(1-\rho)^2} \right]$$

$$L_q = L - (1 - P_0)$$

$$W = \frac{L}{\lambda} \qquad W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W = W_q + \frac{1-P_0}{\lambda}$$

$$P_n = \begin{cases} \left(\dfrac{\lambda}{\mu_1} \right)^n P_0 & (0 \le n < k) \\ \dfrac{\lambda^n}{\mu_1^{k-1} \mu^{n-k+1}} P_0 & (n \ge k) \end{cases}$$

11. *M/M/1*: finite population of size *M*.

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{M} \frac{M!}{(M-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right]^{-1}$$

$$P_n = \frac{M!}{(M-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0 \quad \text{for } n = 1, 2, \ldots, M$$

$$L = M - \frac{\mu}{\lambda} [1 - P_0]$$

$$L_q = M - \frac{\lambda + \mu}{\lambda} (1 - P_0)$$

$$W = \frac{L}{\lambda'} \quad , \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda'} \quad \text{where } \lambda' = \lambda (M - L)$$

APPENDIX 1 / *LAMPIRAN 1*

TWO-DIGIT RANDOM NUMBER TABLE

03	26	48	92	38	96	41	04	35	84
71	44	81	46	44	47	07	20	58	04
33	75	06	41	87	72	63	88	59	54
53	71	27	13	37	45	89	61	30	26
41	15	43	91	46	81	57	39	34	86
16	18	75	11	26	80	93	97	29	33
88	50	00	56	70	19	90	00	93	95
13	10	08	15	29	33	75	70	43	05
15	72	73	69	27	75	72	95	99	56
64	10	99	02	18	26	78	69	19	12
98	66	53	86	34	71	09	88	56	08
43	05	06	19	91	78	03	65	08	16
69	82	02	61	98	50	74	84	60	41
06	40	10	24	68	42	39	97	25	55
34	86	83	41	33	83	85	92	32	29
46	05	92	36	82	04	67	05	18	69
28	73	59	56	43	88	61	17	07	48
35	53	49	39	98	14	16	76	69	10
90	90	18	27	75	08	75	17	55	68
62	32	97	16	33	66	02	34	62	26

- ooo00ooo -