First Semester Examination
Academic Session 2018/2019

December 2018/January 2019

MST562 – Stochastic Processes
(Proses Stokastik)

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of EIGHT (8) pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LAPAN (8) muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions : Answer **THIRTEEN (13)** questions.

*[**Arahan :** Jawab **TIGA BELAS (13)** soalan.]*

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah digunapakai].

Question 1

Bill and George go target shooting together. Both shoot at a target at the same time. Suppose Bill hits the target with probability 0.7, whereas George, independently, hits the target with probability 0.4.

(a) Given that exactly one shot hit the target, what is the probability that it was George's shot?

(b) Given that the target is hit, what is the probability that George hit it?

[8 marks]

Soalan 1

Bill dan George pergi menembak sasaran bersama. Kedua-dua menembak pada sasaran pada masa yang sama. Andaikan Bill kena sasaran dengan kebarangkalian 0.7, sedangkan George kena sasaran dengan kebarangkalian 0.4.

(a) Diberi satu tembakan kena sasaran dengan tepat, apakah kebarangkalian bahawa ianya ditembak oleh George?

(b) Diberi sasaran kena tembakkan, apakah kebarangkalian George menembaknya?

[8 markah]

Question 2

If X and Y are independent Poisson random variables with respective means λ_1 and λ_2, calculate the conditional expected value of X given that X + Y = n.

[7 marks]

Soalan 2

Jika X dan Y adalah pembolehubah rawak Poisson tak bersandar dengan min masing-masing λ_1 dan λ_2, kirakan nilai jangkaan bersyarat X diberi bahawa X + Y = n.

[7 markah]

Question 3

A miner is trapped in a mine containing three doors. The first door leads to a tunnel that takes him to safety after two hours of travel. The second door leads to a tunnel that returns him to the mine after three hours of travel. The third door leads to a tunnel that returns him to his mine after five hours. Assuming m that the miner is at all times equally likely to choose any one of the doors, what is the expected length of time until the miner reaches safety?

[5 marks]

Soalan 3

Seorang pelombong terperangkap dalam lombong yang mempunyai tiga pintu. Pintu pertama membawa kepada terowong yang membawa dia ke jalan yang selamat selepas dua jam perjalanan. Pintu kedua membawa kepada sebuah terowong yang mengembalikannya ke lombong selepas tiga jam perjalanan. Pintu ketiga mengarah ke terowong yang mengembalikannya ke lombongnya selepas lima jam. Dengan mengandaikan m bahawa pelombong pada setiap masa sama boleh jadi memilih mana-mana pintu, apakah jangkaan masa yang diambil sehingga pelombong selamat?

[5 markah]

Question 4

The number of storms in the upcoming rainy season is Poisson distributed but with a parameter value that is uniformly distributed over (0, 5). That is, if A is uniformly distributed over (0, 5), then A = λ, where λ is the mean of Poisson distribution. Find the probability there are at least three storms during this season.

[5 marks]

Soalan 4

Bilangan ribut pada musim hujan yang akan datang adalah taburan Poisson tetapi dengan nilai parameter yang bertaburan seragam (0, 5). Jika A bertaburan seragam ke atas (0, 5), maka A = λ, di mana λ adalah purata taburan Poisson. Cari kebarangkalian terdapat sekurang-kurangnya tiga ribut semasa musim ini.

[5 markah]

Question 5

Each time a certain horse runs in a three-horse race, it has probability 1/2 of winning, 1/4 of coming in second, and 1/4 of coming in third, independent of the outcome of any previous race. We have an independent trials process but it can also be considered from the point of view of Markov chain theory. Construct the probability transition matrix.

[5 marks]

Soalan 5

Setiap kali kuda tertentu berlumba dalam perlumbaan tiga kuda, ia mempunyai kebarangkalian 1/2 menang, 1/4 tempat kedua, dan 1/4 tempat ketiga, tidak bersandar kepada hasil dari setiap perlumbaan terdahulu. Di sini adalah satu proses cubaan tak bersandar tetapi juga dapat dipertimbangkan dari sudut pandangan teori rantai Markov. Bina satu matriks peralihan kebarangkalian.

[5 markah]

Question 6

Three out of every four trucks on the road are followed by a car, while only one out of every five cars is followed by a truck. What fraction of vehicles on the road are trucks?

[10 marks]

Soalan 6

Tiga dari setiap empat trak di jalan raya diikuti oleh sebuah kereta, sementara hanya satu dari setiap lima kereta yang diikuti oleh trak. Apakah pecahan kenderaan di jalan raya adalah trak?

[10 marks]

Question 7

For a branching process with offspring distribution given by $P_0 = 1/6$, $P_1 = 1/2$, $P_3 = 1/3$, determine

(a) Expectation and variance of X_9, the population at generation 9.

(b) Probability that the branching process dies by generation 3, but not by generation 2.

[10 marks]

Soalan 7

Untuk proses bercabang dengan taburan keturunan yang diberikan oleh $P_0 = 1/6$, $P_1 = 1/2$, $P_3 = 1/3$, tentukan

(a) Jangkaan dan varians X_9, populasi pada generasi 9.

(b) Kebarangkalian bahawa proses bercabang mati oleh generasi 3, tetapi bukan oleh generasi 2.

[10 markah]

Question 8

Suppose that you arrive at a single-teller bank to find five other customers in the bank, one being served and the other four waiting in line. You join the end of the line. If the service times are all exponential with rate μ, what is the expected amount of time you will spend in the bank?

[7 marks]

Soalan 8

Anggapkan anda tiba di bank juruwang tunggal dan mendapati lima pelanggan lain di bank, seorang sedang dilayan dan empat lagi sedang menunggu. Anda menyertai diakhir barisan. Sekiranya masa perkhidmatan adalah kesemuanya eksponen dengan kadar μ, apakah jumlah masa yang dijangkakan yang akan anda luangkan di bank?

[7 markah]

Question 9

A doctor has scheduled two appointments, one at 1 P.M. and the other at 1:30 P.M. The amounts of time that appointments last are independent exponential random variables with mean 30 minutes. Assuming that both patients are on time, find the expected amount of time that the 1:30 P.M appointment spends at the doctor's office.

[8 marks]

Soalan 9

Seorang doktor telah menjadualkan dua perjumpaan, satu pada 1 petang dan yang lainnya pada 1:30 petang. Jumlah masa perjumpaan adalah pemboleh ubah rawak eksponen tak bersandar dengan min 30 minit. Dengan mengandaikan bahawa kedua-dua pesakit adalah tepat pada waktunya, cari jumlah jangkaan masa yang akan diluangkan di pejabat doktor bagi perjumpaan 1:30.

[8 markah]

Question 10

Suppose that a one-celled organism can be in one of two states—either A or B. An individual in state A will change to state B at an exponential rate α; an individual in state B divides into two new individuals of type A at an exponential rate β. Define an appropriate continuous-time Markov chain for a population of such organisms and determine the appropriate parameters for this model.

[8 marks]

Soalan 10

Anggap bahawa satu sel organisma boleh berada dalam salah satu daripada dua keadaan-sama ada A atau B. Individu dalam keadaan A akan berubah ke keadaan B pada kadar eksponen α; individu dalam keadaan B membahagikan kepada dua individu baru jenis A pada kadar eksponen β. Tentukan rangkaian Markov masa-selanjar yang sesuai untuk populasi organisma sedemikian dan tentukan parameter yang sesuai untuk model ini.

[8 markah]

Question 11

Consider two machines that are maintained by a single repairman. Machine I functions for an exponential time with rate μ_i before breaking down, i = 1, 2. The repair times (for either machine) are exponential with rate μ. Can we analyze this as a birth and death process? If so, what are the parameters? If not, how can we analyze it?

[7 marks]

Soalan 11

Andaikan ada dua mesin yang diselenggarakan oleh seorang pembaik. Mesin I berfungsi untuk masa yang eksponen dengan kadar μ_i sebelum rosak, i = 1, 2. Masa pembaikan (bagi mana-mana mesin) adalah eksponen dengan kadar μ. Bolehkah kita menganalisis ini sebagai proses kelahiran dan kematian? Jika ya, apakah parameternya? Jika tidak, bagaimanakah kita boleh menganalisisnya?

[7 markah]

Question 12

The manager of a market can hire either Mary or Alice. Mary, who gives service at an exponential rate of 20 customers per hour, can be hired at a rate of $3 per hour. Alice, who gives service at an exponential rate of 30 customers per hour, can be hired at a rate of $*C* per hour. The manager estimates that, on the average, each customer's time is worth $1 per hour and should be accounted for in the model. If customers arrive at a Poisson rate of 10 per hour, then

(a) What is the average cost per hour if Mary is hired? if Alice is hired?

(b) Find *C* if the average cost per hour is the same for Mary and Alice?

[10 marks]

…8/-

Soalan 12

Pengurus pasar boleh upah sama ada Mary atau Alice. Mary, memberi perkhidmatan pada kadar eksponen sebanyak 20 pelanggan sejam, boleh diupah pada kadar $ 3 sejam. Alice, yang memberikan perkhidmatan pada kadar eksponen sebanyak 30 pelanggan sejam, boleh diupah pada kadar $ C sejam. Pengurus menganggarkan bahawa, secara purata, setiap masa pelanggan bernilai $ 1 sejam dan harus diambil kira dalam model. Jika pelanggan tiba pada kadar Poisson sebanyak 10 pelanggan sejam, maka

(a) Apakah kos purata sejam jika Mary diupah? jika Alice diupah?

(b) Cari C jika purata kos sejam adalah sama bagi Mary dan Alice.

[10 markah]

Question 13

In a bicycle race between two competitors, let Y(t) denote the amount of time (in seconds) by which the racer that started in the inside position is ahead when 100t percent of the race has been completed, and suppose that $\{Y(t),\ 0 \leq t \leq 1\}$ can be effectively modeled as a Brownian motion process with variance parameter σ^2.

(a) If the inside racer is leading by σ seconds at the midpoint of the race, what is the probability that she is the winner?

(b) If the inside racer wins the race by a margin of σ seconds, what is the probability that she was ahead at the midpoint?

[10 marks]

Soalan 13

Dalam perlumbaan basikal antara dua pesaing, andaikan Y(t) menandakan jumlah masa (dalam saat) yang mana pelumba yang bermula pada kedudukan dalam di hadapan apabila 100t peratus perlumbaan telah selesai dan anggap bahawa $\{Y(t),\ 0 \leq t \leq 1\}$ boleh dimodelkan secara berkesan sebagai proses gerakan Brownian dengan parameter varians σ^2.

(a) Sekiranya pelumba kedudukan dalam mendahului dengan σ saat pada pertengahan perlumbaan, apakah kebarangkalian bahawa dia adalah pemenang?

(b) Sekiranya pelumba kedudukan dalam memenangi perlumbaan dengan margin σ saat, apakah kebarangkalian bahawa dia mendahului pada pertengahan?

[10 markah]

- ooo00ooo -