First Semester Examination
Academic Session 2018/2019

December 2018/January 2019

MST561 - Statistical Inference
(Pentaabiran Statistik)

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of NINE (9) pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi SEMBILAN (9) muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions : Answer **ALL FIVE (5)** questions.

*[**Arahan :** Jawab **SEMUA LIMA (5)** soalan.]*

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah digunapakai].

Question 1

(a) A coin is tossed three times. Let T and H represent tail and head, respectively. B is defined as an event that two tails are obtained in the three tosses.

(i) Find the set of all possible outcomes, Ω, for event B.

(ii) Based on (i), find the σ-field, S, for event B.

[30 marks]

(b) Let the random variables (X, Y) have the joint density function $f(x, y) = 2(x + y)$, $0 \leq x \leq y \leq 1$, and zero elsewhere.

(i) Find the conditional density function of X given $Y = y$ and the conditional density function of Y given $X = x$.

(ii) Find the conditional expectation of X given $Y = y$.

[40 marks]

(c) Let X has the binomial, $b(n, p)$ distribution. Find the distribution of the random variable $Y = n - X$ using the moment generating function method.

[30 marks]

Soalan 1

(a) Satu duit syiling dilambungkan tiga kali. Biarkan T dan H, masing-masing mewakili bunga dan kepala. B ditakrifkan sebagai suatu peristiwa yang mana dua bunga diperoleh dalam tiga lambungan tersebut.

(i) Cari set bagi semua kesudahan yang mungkin, Ω, untuk peristiwa B.

(ii) Berdasarkan (i), cari medan-σ, S, untuk peristiwa B.

[30 markah]

(b) *Biarkan pembolehubah rawak (X, Y) mempunyai fungsi ketumpatan tercantum* $f(x, y) = 2(x + y)$, *0 ≤ x ≤ y ≤ 1, dan sifar di tempat lain.*

(i) *Cari fungsi ketumpatan bersyarat X diberi Y = y dan fungsi ketumpatan bersyarat Y diberi X = x.*

(ii) *Cari jangkaan bersyarat X diberi Y = y.*

[40 markah]

(c) *Biarkan X mempunyai taburan binomial, b(n, p). Cari taburan pembolehubah rawak Y = n – X dengan menggunakan kaedah fungsi penjana momen.*

[30 markah]

Question 2

(a) If X has the beta distribution, i.e. $X \sim B(\alpha,1)$, find the function h so that $Y = h(X) \sim U(0,1)$.

[25 marks]

(b) Assume that X is a continuous random variable with the density function $f(x) = 2xe^{-x^2} I_{(0,\infty)}(x)$. Find the density function of $Y = X^2$.

[25 marks]

(c) Both X and Y are independent random variables having a common exponential distribution with parameter λ. If $S = \dfrac{X}{X+Y}$ and $T = X + Y$, show that S and T are independent.

[25 marks]

(d) If X is a random variable that has the moment generating function $M_X(t)$, which exists for all $-h < t < h$, $h > 0$, show that the moment generating function for the random variable $Y = aX + b$, where a ($\neq 0$) and b are constants, is $M_Y(t) = e^{tb} M_X(at)$.

[25 marks]

Soalan 2

(a) *Jika X mempunyai taburan beta, iaitu* $X \sim B(\alpha,1)$*, cari fungsi h supaya* $Y = h(X) \sim U(0,1)$.

[25 markah]

(b) *Andaikan bahawa X ialah suatu pembolehubah rawak selanjar dengan fungsi ketumpatan* $f(x) = 2xe^{-x^2} I_{(0,\infty)}(x)$. *Cari fungsi ketumpatan* $Y = X^2$.

[25 markah]

(c) *Kedua-dua X dan Y adalah pembolehubah rawak tak bersandar yang mempunyai taburan eksponen sepunya dengan parameter λ. Jika* $S = \dfrac{X}{X+Y}$ *dan T = X + Y, tunjukkan bahawa S dan T adalah tak bersandar.*

[25 markah]

(d) *Jika X ialah suatu pembolehubah rawak yang mempunyai fungsi penjana momen* $M_X(t)$*, yang wujud untuk semua –h < t < h, h > 0, tunjukkan bahawa fungsi penjana momen untuk pembolehubah rawak Y = aX + b, yang mana a (≠ 0) dan b adalah pemalar, ialah* $M_Y(t) = e^{tb} M_X(at)$.

[25 markah]

Question 3

(a) Let X be a random variable and $X_n = X + Y_n$, where $E(Y_n) = \dfrac{1}{n}$ and $Var(Y_n) = \dfrac{\sigma^2}{n}$, $\sigma > 0$ is a constant. Show that $X_n \xrightarrow{p} X$.

[40 marks]

(b) $X_1, ..., X_n$ are n independent and identically distributed (i.i.d.) random variables with the following probability mass function:

$$P(x) = \begin{cases} 0.1 & x = 0 \\ 0.9 & x = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(i) How is $E(X)$ related to $P(1)$?

(ii) Use Chebyshev's inequality to find α such that $P\left[\left|M_{90}(X) - P(1)\right| \geq 0.05\right] \leq \alpha$.

(iii) Use Chebyshev's inequality to find n such that $P\left[\left|M_n(X)-P(1)\right|\geq 0.03\right]\leq 0.1$.

[60 marks]

Soalan 3

(a) *Biarkan X sebagai pembolehubah rawak dan* $X_n = X + Y_n$, *yang mana* $E(Y_n)=\frac{1}{n}$ *dan* $\operatorname{var}(Y_n)=\frac{\sigma^2}{n}$, $\sigma>0$ *ialah pemalar. Tunjukkan bahawa* $X_n \xrightarrow{p} X$.

[40 markah]

(b) $X_1,...,X_n$ *merupakan n pembolehubah rawak yang tak bersandar dan bertaburan secaman dengan fungsi jisim kebarangkalian berikut:*

$$P(x)=\begin{cases}0.1 & x=0\\ 0.9 & x=1\\ 0 & \textit{selainnya}\end{cases}$$

(i) *Bagaimanakah* $E(X)$ *dikaitkan kepada* $P(1)$ *?*

(ii) *Gunakan ketidaksamaan Chebyshev untuk mencari* α *supaya* $P\left[\left|M_{90}(X)-P(1)\right|\geq 0.05\right]\leq \alpha$.

(iii) *Gunakan ketidaksamaan Chebyshev untuk mencari* n *supaya* $P\left[\left|M_n(X)-P(1)\right|\geq 0.03\right]\leq 0.1$.

[60 markah]

Question 4

Consider an i.i.d. sample of random variables with density function $f(x|\sigma)=\frac{1}{2\sigma}\exp\left(-\frac{|x|}{\sigma}\right)$.

(a) Find the method of moments estimate of σ .

[25 marks]

(b) Find the maximum likelihood estimate of σ.

[25 marks]

(c) Find the asymptotic variance of the maximum likelihood estimate.

[25 marks]

(d) Find a sufficient statistic for σ.

[25 marks]

Soalan 4

Pertimbangkan satu sampel tak bersandar dan bertaburan secaman dengan fungsi kebarangkalian $f\left(x|\sigma\right)=\dfrac{1}{2\sigma}\exp\left(-\dfrac{|x|}{\sigma}\right)$.

(a) *Cari anggaran kaedah momen bagi* σ.

[25 markah]

(b) *Cari anggaran kebolehjadian maksimum bagi* σ.

[25 markah]

(c) *Cari varians berasimtot bagi anggaran kebolehjadian maksimum.*

[25 markah]

(d) *Cari statistik cukup bagi* σ.

[25 markah]

Question 5

(a) Let $X_1,\dots X_n$ be a random sample from a distribution with pdf $f\left(x|\theta\right)=\theta x^{\theta-1}$, $0\le x\le 1,\ \theta>0$.

(i) Use the Neyman-Pearson Lemma to derive the form of the most powerful test for testing $H_0:\theta=\theta_0$ vs. $H_1:\theta=\theta_1$, $\theta_0>\theta_1$. Is your test most powerful for testing $H_0:\theta\ge\theta_0$ vs. $H_1:\theta<\theta_0$? Why?

[20 marks]

(ii) Find explicitly the critical value k for testing $H_0:\theta=\theta_0$ vs. $H_1:\theta=\theta_1$ when $n=1$, $\theta_0=0.5$, $\theta_1=0.25$, and $\alpha=0.05$.

[20 marks]

(b) Let $X_1,\ldots X_n$ be a random sample from the probability density function $f\left(x|\theta\right)=\dfrac{2x}{\theta^2},\ 0\le x\le\theta$.

(i) Show that $X_{(n)}=\max\left(X_1,\ldots,X_n\right)$ is a consistent sufficient estimator for θ.

[20 marks]

(ii) Show that $\dfrac{X_{(n)}}{\theta}$ is a pivotal quantity.

[20 marks]

(iii) Using the pivotal quantity above, derive a confidence interval for θ with lower limit $L\left(\mathbf{X}\right)=X_{(n)}$.

[20 marks]

Soalan 5

(a) Biarkan $X_1,\ldots X_n$ sebagai satu sampel rawak daripada taburan dengan fungsi ketumpatan kebarangkalian $f\left(x|\theta\right)=\theta x^{\theta-1},\ 0\le x\le 1,\ \theta>0$.

(i) Gunakan Lemma Neyman-Pearson untuk menerbitkan bentuk ujian paling berkuasa untuk menguji $H_0:\theta=\theta_0$ lawan $H_1:\theta=\theta_1$, $\theta_0>\theta_1$. *Adakah ujian anda paling berkuasa untuk menguji* $H_0:\theta\ge\theta_0$ lawan $H_1:\theta<\theta_0$ *? Kenapa?*

[20 markah]

(ii) Cari secara eksplisit nilai genting k untuk menguji $H_0:\theta=\theta_0$ *lawan* $H_1:\theta=\theta_1$ *apabila* $n=1$, $\theta_0=0.5$, $\theta_1=0.25$, *dan* $\alpha=0.05$.

[20 markah]

(b) Biarkan $X_1,\ldots X_n$ sebagai satu sampel rawak daripada fungsi ketumpatan kebarangkalian $f\left(x|\theta\right)=\dfrac{2x}{\theta^2},\ 0\le x\le\theta$.

(i) Tunjukkan bahawa $X_{(n)}=\text{maks}\left(X_1,\ldots,X_n\right)$ *ialah suatu penganggar cukup dan konsisten bagi* θ.

[20 markah]

(ii) *Tunjukkan bahawa* $\dfrac{X_{(n)}}{\theta}$ *ialah satu kuantiti pangsian.*

[20 markah]

(iii) *Dengan menggunakan kuantiti pangsian di atas, terbitkan suatu selang keyakinan bagi* θ *dengan had bawah* $L(\mathbf{X}) = X_{(n)}$.

[20 markah]

APPENDIX / *LAMPIRAN*

Taburan	Fungsi Ketumpatan	Min	Varians	Fungsi Penjana Momen
Seragam Diskrit	$f(x)=\frac{1}{N}\, I_{\{1,2,\cdots,N\}}(x)$	$\frac{N+1}{2}$	$\frac{N^2-1}{12}$	$\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{N}e^{jt}$
Bernoulli	$f(x)=p^x q^{1-x}\, I_{\{0,1\}}(x)$	p	pq	$q+pe^t$
Binomial	$f(x)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x}\, I_{\{0,1,\cdots,n\}}(x)$	np	npq	$\left(q+pe^t\right)^n$
Geometri	$f(x)=pq^x I_{\{0,1,\cdots\}}(x)$	$\frac{q}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{p}{1-qe^t}$, $qe^t<1$
Poisson	$f(x)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}\, I_{\{0,1,\cdots\}}(x)$	λ	λ	$exp\{\lambda(e^t-1)\}$
Seragam	$f(x)=\frac{1}{b-a}\, I_{[a,b]}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)t}$, $t\neq 0$
Normal	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, exp\{-(x-\mu)^2/2\sigma^2\}\, I_{(-\infty,\infty)}(x)$	μ	σ^2	$exp\{\mu t+(\sigma t)^2/2\}$
Eksponen	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}\, I_{(0,\infty)}(x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$, $t<\lambda$
Gama	$f(x)=\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda x}x^{\alpha-1}\, I_{(0,\infty)}(x)$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^{\alpha}$, $t<\lambda$
Khi Kuasa Dua	$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{r/2}\frac{1}{\Gamma(r/2)}e^{-x/2}x^{(r/2)-1}\, I_{(0,\infty)}(x)$	r	$2r$	$\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{r/2}$, $t<\frac{1}{2}$
Beta	$f(x)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\, I_{(0,1)}(x)$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$	

- ooo00ooo -