

**SULIT**

---



First Semester Examination  
Academic Session 2018/2019

December 2018/January 2019

**MSS414 - Topics In Pure Mathematics**  
**(*Topik-topik Dalam Matematik Tulen*)**

Duration : 3 hours  
(Masa : 3 jam)

---

Please check that this examination paper consists of FIVE (5) pages of printed material before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA (5) muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

**Instructions:** Answer all **FOUR** (4) questions.

**[Arahan:** Jawab semua **EMPAT** (4) soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

*[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].*

...2/-

**SULIT**

**Question 1**

- (a) Prove that  $3^n \geq n^3$  for all integers  $n \geq 4$ .
- (b) State the Division Algorithm (Theorem). Then show that the square of any integer is either of the form  $3k$  or  $3k + 1$ .
- (c) Let  $\gcd(a, b) = 1$ . Show that
- if  $c|(a + b)$ , then  $\gcd(a, c) = \gcd(b, c) = 1$ ,
  - $\gcd(a + b, a^2 + b^2)$  is 1 or 2.

[ 100 marks ]

**Soalan 1**

- (a) *Tunjukkan bahawa  $3^n \geq n^3$  untuk semua integer  $n \geq 4$ .*
- (b) *Nyatakan (Teorem) Algoritma Pembahagian. Kemudian, tunjukkan bahawa kuasa dua mana-mana integer adalah berbentuk  $3k$  atau  $3k + 1$ .*
- (c) *Biar  $\gcd(a, b) = 1$ . Tunjukkan bahawa*
- jika  $c|(a + b)$ , maka  $\gcd(a, c) = \gcd(b, c) = 1$ ,*
  - $\gcd(a + b, a^2 + b^2)$  ialah 1 atau 2.*

[ 100 markah ]

**Question 2**

- (a) MSS Airlines offers three categories of air tickets for Johor-Penang route.

<u>Category</u>	<u>Ticket Price</u>
First Class	RM140
Business Class	RM110
Economy	RM78

If 69 passengers pay a total of RM6548 for their tickets on a particular flight, how many of each category of ticket were sold for that flight?

- (b) Show that the only prime of the form  $n^2 - 4$  is 5.
- (c) A positive integer  $m$  is called superperfect if  $\sigma(\sigma(m)) = 2m$ . Show that
- (i) 64 is superperfect,
- (ii) if  $m = 2^q$  where  $2^{q+1} - 1$  is prime, then  $m$  is superperfect.

[ 100 marks ]

**Soalan 2**

- (a) MSS Airlines menawarkan tiga kategori tiket penerbangan untuk laluan Johor-Penang.

<u>Kategori</u>	<u>Harga Tiket</u>
Kelas Pertama	RM140
Kelas Bisnes	RM110
Ekonomi	RM78

Jika seramai 69 penumpang membayar sejumlah RM6548 untuk tiket mereka bagi suatu penerbangan, berapakah jumlah tiket yang dijual bagi setiap kategori penerbangan tersebut?

- (b) Tunjukkan bahawa satu-satunya nombor perdana yang berbentuk  $n^2 - 4$  ialah 5.
- (c) Satu nombor positif  $m$  dikatakan super-sempurna jika  $\sigma(\sigma(m)) = 2m$ . Tunjukkan bahawa
- (i) 64 adalah super-sempurna,
- (ii) jika  $m = 2^q$  untuk  $2^{q+1} - 1$  nombor perdana, maka  $m$  adalah super-sempurna.

[ 100 markah ]

...4/-

**Question 3**

- (a) By using the congruence theory, show that 9 divides  $10^{n+1} + 4(10^n) + 4$ .
- (b) Show that  $a \equiv b \pmod{n}$  if and only if  $a$  and  $b$  leave the same nonnegative remainder when divided by  $n$ .
- (c) Solve the following simultaneous linear congruences:
- $$x \equiv 1 \pmod{3}; \quad x \equiv 2 \pmod{5}; \quad x \equiv 3 \pmod{7}.$$

[ 100 marks ]

**Soalan 3**

- (a) Dengan menggunakan teori kongruen, tunjukkan bahawa 9 membahagi  $10^{n+1} + 4(10^n) + 4$ .
- (b) Tunjukkan bahawa  $a \equiv b \pmod{n}$  jika dan hanya jika  $a$  and  $b$  mempunyai baki tak negatif yang sama apabila dibahagi oleh  $n$ .
- (c) Selesaikan kongruen linear serentak yang berikut:
- $$x \equiv 1 \pmod{3}; \quad x \equiv 2 \pmod{5}; \quad x \equiv 3 \pmod{7}.$$

[ 100 markah ]

**Question 4**

- (a) Give a complete statement of any two of the following theorems. (Note: Do not give the proof.)
- (i) Chinese Remainder Theorem.
  - (ii) Fermat's Little Theorem.
  - (iii) Euler's Theorem.
  - (iv) Quadratic Reciprocity Law.
- (b) Show that if  $n$  is an even integer, then  $\phi(2n) = 2\phi(n)$ .
- (c) Verify that 2 is the primitive root of 19.

[ 100 marks ]

**Soalan 4**

- (a) Berikan pernyataan yang lengkap untuk mana-mana dua teorem berikut. (Nota: Jangan beri pembuktian.)
- (i) Teorem Baki Cina.
  - (ii) Teorem Kecil Fermat.
  - (iii) Teorem Euler.
  - (iv) Hukum Kesalingan Kuadratik.
- (b) Tunjukkan bahawa jika  $n$  merupakan integer genap, maka  $\phi(2n) = 2\phi(n)$ .
- (c) Tentusahkan bahawa 2 merupakan punca primitif untuk 19.

[ 100 markah ]