First Semester Examination
Academic Session 2018/2019

December 2018/January 2019

MSS212 - Further Linear Algebra
[Aljabar Linear Lanjutan]

Duration : 3 hours
(Masa : 3 jam)

Please check that this examination paper consists of FIVE (5) pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA (5) muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all SIX (6)** questions.

*[**Arahan:** Jawab **semua ENAM (6)** soalan.]*

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

Question 1

(a) (i) What does an alternating function mean?

(ii) Provide an example of an alternating function.

(b) Let

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

(i) By using the permutation approach, derive the determinant of A, $\det(A)$.

(ii) Let B be the matrix when the first row of A is interchanged with the second row. From (b)(i), show that $\det(B) = -\det(A)$.

[10 marks]

Soalan 1

(a) (i) Apakah maksud suatu fungsi selang-seli?

(ii) Beri satu contoh fungsi selang-seli.

(b) Biar

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

(i) Dengan menggunakan pendekatan pilihatur, dapatkan penentu bagi A, $\det(A)$.

(ii) Biar B matriks yang diperoleh apabila baris pertama A disaling tukar dengan baris kedua. Daripada (b)(i), tunjukkan bahawa $\det(B) = -\det(A)$.

[10 markah]

Question 2

Let $P_2(\mathbb{C})$ denote the vector space of polynomials of degree less than or equal to 2 over $\mathbb{C}$.

(a) (i) Show that the set $S = \{1+x^2, x^2\}$ is linearly independent in $P_2(\mathbb{C})$.

(ii) Is span(S)$= P_2(\mathbb{C})$? If not, extend S to form a basis for $P_2(\mathbb{C})$.

(b) Construct an isomorphism to show that $P_2(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^3$.

[20 marks]

Soalan 2

Biar $P_2(\mathbb{C})$ mewakili ruang vektor yang terdiri daripada polinomial berdarjah kurang atau sama dengan 2 atas $\mathbb{C}$.

(a) (i) Tunjukkan bahawa set $S = \{1+x^2, x^2\}$ adalah tak bersandar linear dalam $P_2(\mathbb{C})$.

(ii) Adakah span(S)= $P_2(\mathbb{C})$? Jika tidak, perluaskan S untuk membentuk satu asas bagi $P_2(\mathbb{C})$.

(b) Bina satu isomorfisma untuk menunjukkan $P_2(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^3$.

[20 markah]

Question 3

Let

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Find the Jordan Canonical Form for A.

(b) Compute A^{10}.

[20 marks]

Soalan 3

Biar

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Dapatkan Bentuk Berkanun Jordan bagi A.

(b) Hitung A^{10}.

[20 markah]

Question 4

Let

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

By using the Spectral Theorem, determine whether A can be diagonalised.

[20 marks]

Soalan 4

Biar

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan Teori Spektrum, tentukan sama ada A terpepenjurukan.

[20 markah]

Question 5

Let T be a linear operator on $\mathbb{C}^2$ over $\mathbb{C}$ defined by

$$T(x,y) = (2x+iy,(1-i)x).$$

(a) (i) Find $T^*(x,y)$ where T^* is the adjoint of T.

(ii) Evaluate T^* at the vector $v = (3-i,1+2i)$.

(b) Let α be the standard ordered basis for $\mathbb{C}^2$.

(i) What is the matrix representation $[T]_\alpha$ of T relative to α?

(ii) Hence, find $[T^*]_\alpha$.

[15 marks]

Soalan 5

Biar T suatu pengoperasi linear pada $\mathbb{C}^2$ atas $\mathbb{C}$ ditakrifkan oleh

$$T(x,y) = (2x+iy,(1-i)x).$$

(a) (i) Dapatkan $T^*(x,y)$ yang mana T^* ialah dampingan bagi T.

(ii) Nilaikan T^* pada vektor $v = (3-i,1+2i)$.

(b) Biar α suatu asas piawai bertertib bagi $\mathbb{C}^2$.

(i) Apakah matriks perwakilan $[T]_\alpha$ bagi T terhadap asas piawai α?

(ii) Oleh yang demikian, dapatkan $[T^*]_\alpha$.

[15 marks]

Question 6

Determine if the following statements are true or false. Justify your answers.

(a) $\mathbb{R}^2$ is a subspace of $\mathbb{C}^2$ over $\mathbb{C}$.

(b) If T is a linear transformation from $\mathbb{C}^2$ to $\mathbb{C}^3$ such that $T(x,y) = (x,y,0)$, then T is invertible.

(c) Similar matrices always have the same eigenvectors.

(d) If A is a 3×3 matrix with characteristic polynomial $\lambda(\lambda - 1)^2$, then A is diagonalisable.

(e) The vectors $\{(1,i),(2i,1),(1-i,0)\}$ are linearly independent over $\mathbb{R}$.

[15 marks]

Soalan 6

Tentukan sama ada pernyataan berikut adalah benar atau palsu. Justifikasikan jawapan anda.

(a) $\mathbb{R}^2$ merupakan subruang bagi $\mathbb{C}^2$ atas $\mathbb{C}$.

(b) Jika T suatu penjelmaan linear daripada $\mathbb{C}^2$ kepada $\mathbb{C}^3$ sedemikian hingga $T(x,y) = (x,y,0)$, maka T adalah tersongsangkan.

(c) Matriks yang serupa mempunyai eigenvektor-eigenvektor yang sama.

(d) Jika A suatu matris 3×3 dengan polinomial cirian $\lambda(\lambda - 1)^2$, maka A terpepenjurukan.

(e) Vektor-vektor $\{(1,i),(2i,1),(1-i,0)\}$ adalah tak bersandar linear atas $\mathbb{R}$.

[15 markah]

- ooo O ooo -