

SULIT



First Semester Examination
Academic Session 2018/2019

December 2018/January 2019

**MGM503 - Combinatorics
(Kombinatorik)**

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of TWELVE (12) pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi DUA BELAS (12) muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions : Answer **TEN** (10) questions.

Arahan : Jawab **SEPULUH** (10) soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah digunapakai].

...2/-

SULIT

For Question 1 until Question 4, you may show your computation without detailed explanation.

Untuk Soalan 1 hingga Soalan 4, anda boleh tunjukkan pengiraan tanpa penjelasan terperinci.

Question 1

- (a) There are 10 boys and 12 girls in a classroom. How many ways exist to select:
- (i) either a boy or a girl to sweep the floor?
 - (ii) 3 boys and 3 girls to distribute the textbooks?
- [3 marks]
- (b) How many ways exist for a committee of 11 members to be seated in a row of an assembly if four particular members must be separated?
- [2 marks]
- (c) Consider the letters (without the spaces) in the name of the following actor

ARNOLD ALOIS SCHWARZENEGGER.

For each of the following, leave your answer in factorial notations.

- (i) How many unique arrangements are there for the letters in his name?
- (ii) How many unique arrangements exist if each arrangement must begin and end with the letter E?

[5 marks]

Soalan 1

- (a) *Terdapat 10 orang budak lelaki dan 12 orang budak perempuan di dalam sebuah bilik darjah. Berapakah cara yang wujud untuk memilih:*
- (i) *seorang budak lelaki atau seorang budak perempuan untuk menyapu lantai?*
 - (ii) *3 orang budak lelaki dan 3 orang budak perempuan untuk mengedarkan buku teks?*

[3 markah]

- (b) Berapakah cara yang wujud bagi satu jawatankuasa dengan 11 orang ahli untuk duduk pada satu barisan dalam satu perhimpunan jika empat orang ahli tertentu mesti diasingkan?

[2 markah]

- (c) Pertimbangkan huruf (tanpa ruang) pada nama pelakon berikut

ARNOLD ALOIS SCHWARZENEGGER.

Untuk setiap bahagian berikut, tinggalkan jawapan anda dalam tata tanda faktorial.

- (i) Berapakah susunan unik yang ada bagi huruf pada nama beliau?
- (ii) Berapakah susunan unik yang wujud jika susunan tersebut mesti bermula dan berakhir dengan huruf E?

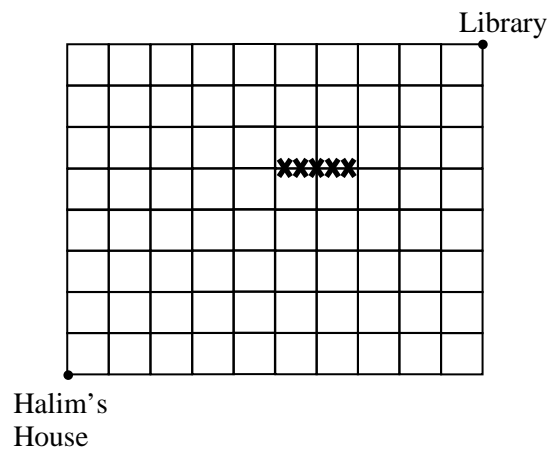
[5 markah]

Question 2

- (a) Find the number of integer solutions to $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 36$ with $x_1 \geq 4$ and $x_4 > 6$.

[2 marks]

- (b) [Refer to diagram] Musa is at a library and he wants to visit his friend Halim's house which is located 10 blocks west and 8 blocks south of the library. All streets from the library to Halim's house are laid out in a rectangular grid, and all of them are available for walking except for the streets indicated by **XXXXX**. If he walks exactly 18 blocks from the library to Halim's house, how many different paths are possible for Musa, given the constraint that he has? (There is no need for you to include the rectangular grid in your answer; just provide combinatorial computations.)



[5 marks]

...4/-

- (c) By using the binomial theorem, obtain the full expansion of $(2x - 5y)^5$ with the coefficients written as integers.

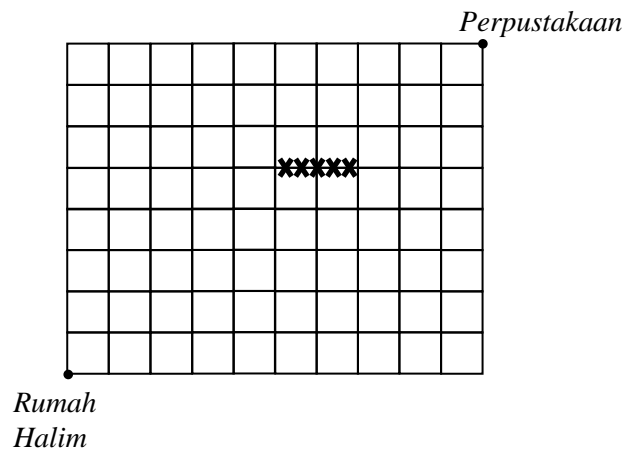
[3 marks]

Soalan 2

- (a) Dapatkan bilangan penyelesaian integer bagi $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 36$ dengan $x_1 \geq 4$ dan $x_4 > 6$.

[2 markah]

- (b) [Rujuk gambar rajah] Musa sedang berada di sebuah perpustakaan dan ingin melawat rumah sahabatnya Halim yang terletak 10 blok barat dan 8 blok selatan dari perpustakaan tersebut. Semua jalan dari perpustakaan ke rumah Halim diletakkan dalam grid segiempat tepat, dan semua jalan tersedia untuk dilalui kecuali jalan yang ditandakan dengan ~~XXXXX~~. Jika dia berjalan tepat 18 blok dari perpustakaan untuk ke rumah Halim, berapa banyakkah laluan berbeza yang mungkin untuk Musa, mengambil kira kekangan yang ada? (Anda tidak perlu menyertakan grid segiempat tepat; hanya beri penghitungan berkombinatorik.)



[5 markah]

- (c) Menggunakan teorem binomial, dapatkan kembangan penuh bagi $(2x - 5y)^5$ dengan pekalinnya ditulis sebagai integer.

[3 markah]

Question 3

- (a) Use Pascal's Formula to show that

$$C(n,k) - 2C(n-3,k-1) = C(n-2,k) + C(n-2,k-2) + 2C(n-3,k-2)$$

for any integer k and n where $k \geq 2$ and $n \geq k+2$. Here, $C(n,k)$ denotes the number of combinations of n items taken k at a time.

[3 marks]

- (b) Find the recurrence relation that describes the following sequences:

(i) 3, 7, 15, 31, 63, 127, ...

(ii) 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,

[4 marks]

- (c) Find the term in the expansion of $(-2a+b+3c-5d)^9$ that has the form Ka^6cd^2 where K is a natural number.

[3 marks]

Soalan 3

- (a) Guna Formula Pascal untuk menunjukkan bahawa

$$C(n,k) - 2C(n-3,k-1) = C(n-2,k) + C(n-2,k-2) + 2C(n-3,k-2)$$

untuk sebarang integer k dan n yang mana $k \geq 2$ dan $n \geq k+2$. Di sini, $C(n,k)$ menandai bilangan gabungan n item yang diambil k pada satu masa.

[3 markah]

- (b) Dapatkan hubungan jadi semula yang menerangkan jujukan berikut:

(i) 3, 7, 15, 31, 63, 127, ...

(ii) 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,

[4 markah]

- (c) Dapatkan sebutan yang berbentuk Ka^6cd^2 dalam kembangan $(-2a+b+3c-5d)^9$, yang mana K ialah nombor asli.

[3 markah]

...6/-

SULIT

Question 4

- (a) Everyday of the week, including Saturday and Sunday, Ainul has breakfast at her dorm's canteen where she will order either a plate of nasi lemak or a plate of fried noodle. How many possible arrangements of breakfast choices does Ainul have for a week?

[2 marks]

- (b) A teacher borrowed one red pen each from 9 students in her class for a school activity. At the end of the activity, she returns all 9 pens to the students individually. How many possibilities for the pens to be returned to the students such that two students got their own pen but the other students got somebody else's pen?

[4 marks]

- (c) 52 hens are to be distributed into four different chicken coops. If there must be at least one hen in each coop, how many ways can the distribution happen?

[4 marks]

Soalan 4

- (a) *Setiap hari dalam seminggu, termasuk Sabtu dan Ahad, Ainul bersarapan di kantin asramanya yang mana dia akan memesan sama ada sepinggan nasi lemak atau sepinggan mi goreng. Berapakah susunan pilihan sarapan yang mungkin bagi Ainul untuk seminggu?*

[2 markah]

- (b) *Seorang guru meminjam pena merah setiap satu daripada 9 orang murid dalam kelasnya untuk suatu aktiviti sekolah. Pada akhir aktiviti, dia mengembalikan semua 9 pena kepada pelajar secara individu. Berapakah kemungkinan bagi pena dikembalikan kepada pelajar sedemikian hingga dua pelajar mendapat pena mereka sendiri tetapi pelajar-pelajar lain mendapat pena orang lain?*

[4 markah]

- (c) *52 ayam betina akan diagihkan ke dalam empat reban ayam yang berbeza. Jika setiap reban mesti mempunyai sekurang-kurangnya satu ekor ayam betina, berapakah cara pengagihan ini boleh berlaku?*

[4 markah]

For Question 5 until Question 10, make sure that your answer is clear, complete and accompanied by adequate justification .

Untuk Soalan 5 hingga Soalan 10, pastikan jawapan anda adalah jelas, lengkap dan disertai justifikasi yang mencukupi.

Question 5

The following different flavoured ring donuts are available at Big Apple cafe: almond ring, candy blast, coco jo, cranberry crown, hunky chunk, koko krunch, misu choco, slam dunk, super cluster, swiss robinson and tweety sweety. Determine the minimum number of people required to ensure that at least one type of ring donut flavour is ordered by at least four people.

[10 marks]

Soalan 5

Perisa donat gelang yang berbeza berikut tersedia di kafe Big Apple: almond ring, candy blast, coco jo, cranberry crown, hunky chunk, koko krunch, misu choco, slam dunk, super cluster, swiss robinson and tweety sweety. Tentukan jumlah minimum orang yang diperlukan untuk memastikan bahawa sekurang-kurangnya satu jenis perisa daripada donat gelang dipesan oleh sekurang-kurangnya empat orang.

[10 markah]

Question 6

Four married couples, Mr. and Mrs. Koo, Mr. and Mrs. Li, Mr. and Mrs. Mew, and Mr. and Mrs. Ng are to be seated at a round table for dinner. How many different arrangements are there if:

- (a) the four couples are seated where no two men sit together?

[5 marks]

- (b) another couple, Mr. and Mrs. Yeoh, suddenly join in and the ten people are rearranged so that Mr. and Mrs. Yeoh sit side-by-side and all the women sit together?

[5 marks]

...8/-

Soalan 6

Empat pasangan berkahwin, En. dan Pn. Koo, En. dan Pn. Li, En. dan Pn. Mew, dan En. dan Pn. Ng akan diberi tempat duduk pada satu meja bulat untuk makan malam. Berapakah bilangan susunan berbeza yang ada jika:

- (a) empat pasangan tersebut diberi tempat duduk yang mana tiada dua lelaki duduk bersama?

[5 markah]

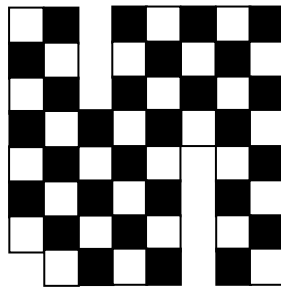
- (b) satu pasangan yang lain, En. dan Pn. Yeoh tiba-tiba turut serta dan sepuluh orang tersebut disusun semula supaya En. dan Pn. Yeoh duduk bersebelahan dan semua wanita duduk bersama?

[5 markah]

Question 7

- (a) It is known that an m -by- n chessboard has a perfect cover by dominoes if either m or n is even. Use this fact to show that the following mutilated chessboard has a perfect cover.

Warning: Marks will not be given if proving only by drawing the perfect cover.



[5 marks]

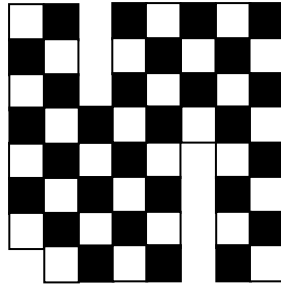
- (b) Show that among any group of five integers (not necessarily consecutive), there are two integers with the same remainder when divided by 4.

[5 marks]

Soalan 7

- (a) *Diketahui bahawa suatu papan catur m -dengan- n mempunyai litupan sempurna oleh domino jika m atau n adalah genap. Guna fakta ini untuk menunjukkan bahawa papan catur yang termutilasi seperti berikut mempunyai litupan sempurna.*

Peringatan: Markah tidak akan diberi jika pembuktian hanya melalui lukisan litupan sempurna tersebut.



[5 markah]

- (b) *Tunjukkan bahawa dalam kalangan mana-mana kumpulan lima integer (tak semestinya berturutan), terdapat dua integer yang mempunyai baki yang sama apabila dibahagi dengan 4.*

[5 markah]

Question 8

Suppose that 109 of the 150 students at Merbok College take at least one of the following computer languages: PASCAL, BASIC and C++. Suppose that 45 study BASIC, 61 study PASCAL, 53 study C++, 18 study BASIC and PASCAL, 15 study BASIC and C++, and 23 study PASCAL and C++. Answer the following questions.

- (a) How many students study all three languages? [5 marks]
- (b) How many students study BASIC but not C++? [3 marks]
- (c) How many students do not study any of the languages? [2 marks]

...10/-

SULIT

Soalan 8

Katakan 109 daripada 150 pelajar di Kolej Merbok mengambil sekurang-kurangnya satu daripada bahasa komputer berikut: PASCAL, BASIC dan C++. Katakan 45 mempelajari BASIC, 61 mempelajari PASCAL, 53 mempelajari C++, 18 mempelajari BASIC dan PASCAL, 15 mempelajari BASIC dan C++, dan 23 mempelajari PASCAL dan C++. Jawab soalan-soalan berikut.

- (a) Berapakah bilangan pelajar yang mempelajari ketiga-tiga bahasa?

[5 markah]

- (b) Berapakah bilangan pelajar yang mempelajari BASIC tetapi tidak C++?

[3 markah]

- (c) Berapakah bilangan pelajar yang tidak mempelajari mana-mana bahasa pun?

[2 markah]

Question 9

- (a) Suppose that the number of bacteria in a colony triples every hour.

- (i) Set up a recurrence relation for the number of bacteria after n hours have elapsed.
- (ii) If 100 bacteria are used to begin a new colony, how many bacteria will be in the colony in 10 hours?

[5 marks]

- (b) Prove by mathematical induction that if n is an integer and $n \geq 1$, then

$$\sum_{i=2}^{n+1} C(i, 2) = C(n+2, 3).$$

[5 marks]

Question 9

(a) *Katakan bilangan bakteria dalam satu koloni bertambah tiga kali ganda pada setiap jam.*

(i) *Sediakan hubungan jadi semula bagi bilangan bakteria selepas n jam telah berlalu.*

(ii) *Jika 100 bakteria digunakan untuk memulakan satu koloni baru, berapakah bilangan bakteria yang akan ada di dalam koloni dalam 10 jam?*

[5 markah]

(b) *Buktikan melalui aruhan matematik bahawa jika n adalah suatu integer dan $n \geq 1$, maka*

$$\sum_{i=2}^{n+1} C(i, 2) = C(n+2, 3).$$

[5 markah]

Question 10

Suppose that there are an abundance of identical purple beads, identical yellow beads, identical red beads, identical white beads, identical blue beads and identical green beads. Answer the following questions.

(a) How many different combinations of twenty beads are there?

[4 marks]

(b) By taking one bead of each colour and putting them in a bowl, determine the number of different selections of more than one bead from the bowl.

[2 marks]

(c) Create a generating function for the number of ways to select k beads from a pile of three red beads, three white beads, four blue beads and five green beads.

[4 marks]

Soalan 10

Katakan terdapat berlimpahan manik ungu seiras, manik kuning seiras, manik merah seiras, manik putih seiras, manik biru seiras dan manik hijau seiras. Jawab soalan-soalan berikut.

- (a) *Berapakah bilangan gabungan dua puluh manik berbeza yang ada?*

[4 markah]

- (b) *Dengan mengambil satu manik dari setiap warna dan meletakkan semua di dalam satu mangkuk, tentukan bilangan pilihan berbeza yang mengandungi lebih daripada satu manik dari mangkuk tersebut.*

[2 markah]

- (c) *Bina satu fungsi penjana untuk menentukan bilangan cara memilih k manik daripada longgokan tiga manik merah, tiga manik putih, empat manik biru dan lima manik hijau.*

[4 markah]

- 00000000 -