

SULIT



First Semester Examination
Academic Session 2018/2019

December 2018/January 2019

**MAT517 – Computational Linear Algebra
(Aljabar Linear pengkomputeran)**

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of TEN (10) pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi SEPULUH (10) muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions : Answer **TEN (10)** questions.

Arahan : Jawab **SEPULUH (10)** soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah digunapakai].

...2/-

SULIT

Question 1

Consider the following methods for computing \mathbf{ABx} , for some $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in R^{n \times n}$, $\mathbf{x} \in R^n$:

I. $\mathbf{A}(\mathbf{Bx})$;

II. $(\mathbf{AB})\mathbf{x}$.

(Brackets denote calculations that are performed first). Explain why Method I is more efficient.

[15 marks]

Soalan 1

Pertimbangkan kaedah-kaedah berikut untuk mengira \mathbf{ABx} , untuk suatu $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in R^{n \times n}$, $\mathbf{x} \in R^n$:

I. $\mathbf{A}(\mathbf{Bx})$;

II. $(\mathbf{AB})\mathbf{x}$.

(Kurungan menunjukkan pengiraan yang perlu dilaksanakan dahulu). Terangkan kenapa Kaedah I lebih efisien.

[15 markah]

Question 2

Let

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$

Consider using Givens rotations to create zeroes in positions 3 and 4 of vector \mathbf{x} . Let the transformation be represented by

$$\mathbf{G}_2 \mathbf{G}_1 \mathbf{x} = \mathbf{y}.$$

...3/-

Write down explicitly, matrices \mathbf{G}_1 , \mathbf{G}_2 and vector \mathbf{y} .

[15 marks]

Soalan 2

Biar

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$

Pertimbangkan penggunaan pemutar Givens untuk mewujudkan sifar di kedudukan-kedudukan 3 dan 4 pada vektor \mathbf{x} . Biar transformasi tersebut diwakilkan oleh

$$\mathbf{G}_2\mathbf{G}_1\mathbf{x} = \mathbf{y}.$$

Tulis secara eksplisit matriks-matriks \mathbf{G}_1 , \mathbf{G}_2 dan vektor \mathbf{y} .

[15 markah]

Question 3

Consider finding the least squares solution of $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ where

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^{-4} & 0 \\ 0 & 10^{-4} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

The exact solution can be determined using the normal equation $\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$. Describe the numerical difficulties you will encounter when using the normal equation method.

[15 marks]

...4/-

Soalan 3

Pertimbangkan mencari penyelesaian kuasa dua terkecil bagi $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ yang mana

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^{-4} & 0 \\ 0 & 10^{-4} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Penyelesaian tepat boleh ditentukan menggunakan persamaan normal $\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$. Huraikan kesukaran berangka yang akan kamu ditemui apabila menggunakan kaedah persamaan normal.

[15 markah]

Question 4

Let $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ with $m \geq n$ and \mathbf{A} is full rank. Given the factorization of \mathbf{A} of the form

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR},$$

where $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ has orthonormal columns and $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is upper triangular. Describe a method for computing the least squares solution of $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ using the QR factors given.

[15 marks]

Soalan 4

Biar $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dengan $m \geq n$ dan \mathbf{A} berpangkat penuh. Diberikan pemfaktoran kepada \mathbf{A} dalam bentuk

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR},$$

yang mana $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mempunyai lajur-lajur ortonormal dan $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ berbentuk segitiga atas. Huraikan satu kaedah untuk mengira penyelesaian kuasa dua terkecil bagi $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ menggunakan faktor-faktor QR yang diberikan.

[15 markah]

Question 5

Let

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Use Householder method to transform \mathbf{A} into a tridiagonal matrix \mathbf{T} such that \mathbf{T} is similar to \mathbf{A} .

[20 marks]

Soalan 5

Biar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Guna kaedah Householder untuk mentransformasikan \mathbf{A} kepada matriks tiga pepenjuru \mathbf{T} sedemikian hingga \mathbf{T} adalah serupa dengan \mathbf{A} .

[20 markah]

Question 6

Let $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ be a symmetric matrix with eigenvalues $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ such that $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n$. The eigenvectors associated with these eigenvalues are $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ respectively, assumed to be orthonormal with respect to the L_2 norm. Consider using the power method to produce a sequence of approximation to \mathbf{v}_1 of the form $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots$ where $\mathbf{x}^{(0)}$ is a known initial vector.

a) Show that

$$\mathbf{x}^{(k)} = \frac{\mathbf{A}^k \mathbf{x}^{(0)}}{\|\mathbf{A}^k \mathbf{x}^{(0)}\|_\infty} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \frac{\lambda_2^k}{\lambda_1^k} \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \frac{\lambda_n^k}{\lambda_1^k} \mathbf{v}_n,$$

where $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ are some scalar values.

(HINT: Start by writing $\mathbf{x}^{(0)}$ as a linear combination of $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$).

..6/-

b) Use the properties of norm to show that

$$\left\| \mathbf{x}^{(k)} - \alpha_1 \mathbf{v}_1 \right\|_2 \leq \gamma \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^k, \quad (1)$$

where $\gamma = |\alpha_2| + |\alpha_3| + \dots + |\alpha_n|$.

c) Based on the inequality in (1), deduce the rate of convergence of $\mathbf{x}^{(k)}$ to $\alpha_1 \mathbf{v}_1$ as $k \rightarrow \infty$.

[20 marks]

Soalan 6

Biar $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ suatu matriks simetri dengan nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sedemikian hingga $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n$. Vektor-vektor eigen yang bersekutu dengan nilai-nilai eigen tersebut ialah $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ masing-masing, diandaikan berortonormal berasaskan norma L_2 . Pertimbangkan menggunakan kaedah kuasa untuk menghasilkan satu jujukan penghampiran kepada \mathbf{v}_1 dalam bentuk $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots$ yang mana $\mathbf{x}^{(0)}$ ialah vektor awalan yang diketahui.

a) Tunjukkan bahawa

$$\mathbf{x}^{(k)} = \frac{\mathbf{A}^k \mathbf{x}^{(0)}}{\left\| \mathbf{A}^k \mathbf{x}^{(0)} \right\|_\infty} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \frac{\lambda_2^k}{\lambda_1^k} \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \frac{\lambda_n^k}{\lambda_1^k} \mathbf{v}_n,$$

yang mana $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ adalah nilai-nilai skalar.

(PETUNJUK: Mulakan dengan menulis $\mathbf{x}^{(0)}$ sebagai gabungan linear $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$).

b) Guna sifat-sifat norma untuk menunjukkan

$$\left\| \mathbf{x}^{(k)} - \alpha_1 \mathbf{v}_1 \right\|_2 \leq \gamma \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^k, \quad (1)$$

yang mana $\gamma = |\alpha_2| + |\alpha_3| + \dots + |\alpha_n|$.

- c) Berdasarkan ketaksamaan (1), simpulkan kadar penumpuan $\mathbf{x}^{(k)}$ kepada $\alpha_1 \mathbf{v}_1$ apabila $k \rightarrow \infty$

[20 markah]

Question 7

Let

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Given that the eigenvalues of $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ are 9 and 4 and the associated eigenvectors are $(1, -2)^T$ and $(2, 1)^T$ respectively. Write down the singular value decomposition (SVD) of \mathbf{A} .

[20 marks]

Soalan 7

Biar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Diberikan nilai eigen $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ adalah 9 dan 4 dan vektor-vektor eigen yang berseketu dengannya ialah $(1, -2)^T$ and $(2, 1)^T$ masing-masing. Tuliskan penghuraian nilai singular (SVD) bagi \mathbf{A} .

[20 markah]

Question 8

Let

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Use the classical Gram-Schmidt process to find a QR factorization of \mathbf{A} where \mathbf{Q} has orthonormal columns and \mathbf{R} is an upper triangular matrix.

[20 marks]

..8/-

SULIT

Soalan 8

Biar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Guna proses Gram-Schmidt klasikal untuk mencari pemfaktoran QR bagi \mathbf{A} yang mana \mathbf{Q} mempunyai lajur-lajur yang ortonormal dan \mathbf{R} ialah matriks segitiga atas.

[20 markah]

Question 9

Let

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 \\ -1 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- Use Gaussian elimination procedure with partial pivoting to factor \mathbf{PA} into a product \mathbf{LU} where \mathbf{P} is the permutation matrix corresponding to the pivoting strategy, \mathbf{L} is a unit lower triangular matrix and \mathbf{U} is an upper triangular matrix.
- Write down \mathbf{L} as a product of elementary matrices.
- Use \mathbf{P} , \mathbf{L} and \mathbf{U} to solve the linear system $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

[30 marks]

Soalan 9

Biar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 \\ -1 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- Guna prosedur penghapusan Gauss dengan pemangsaan separa untuk faktorkan \mathbf{PA} kepada hasil darab \mathbf{LU} yang mana \mathbf{P} ialah matriks susun atur yang berkaitan dengan strategi pemangsaan, \mathbf{L} ialah matriks segitiga bawah unit dan \mathbf{U} ialah matriks segitiga atas.

..9/-

b) Tulis **L** sebagai hasil darab matriks-matiks asas.

c) Guna **P** , **L** dan **U** untuk menyelesaikan sistem persamaan linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

[30 markah]

Question 10

The matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

has singular value decomposition (SVD)

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & -1/2 & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

a) Let $\mathbf{b} = (6,3,3,12)^T$. Compute the minimum norm solution of the system $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

b) What is the dimension of the column space of **A** ?

c) Use the SVD to calculate

i) $cond_2(\mathbf{A})$.

ii) $\|\mathbf{A}\|_2$.

iii) $\|\mathbf{A}\|_F$.

[30 marks]

..10/-

Soalan 10

Matriks

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

mempunyai penghuraian nilai singular (SVD)

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & -1/2 & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

a) Biar $\mathbf{b} = (6, 3, 3, 12)^T$. Kira penyelesaian norma terkecil kepada sistem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

b) Apakah dimensi ruang lajur \mathbf{A} ?

c) Guna SVD tersebut untuk mengira

i) $\text{cond}_2(\mathbf{A})$;

ii) $\|\mathbf{A}\|_2$.

iii) $\|\mathbf{A}\|_F$.

[30 Markah]

