First Semester Examination
Academic Session 2018/2019

December 2018/January 2019

MAT 323 - Differential Equations II
(Persamaan Pembezaan II)

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of SIX (6) pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi ENAM (6) muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions : Answer **FOUR (4)** questions.

*[**Arahan :** Jawab **EMPAT (4)** soalan.]*

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah digunapakai].

Question 1

A simple electric circuit can be described by a system of linear differential equations:

$$\vec{x}\,' = A\vec{x} + \vec{f}, \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

where x_1 is the current through inductor, x_2 is the voltage drop across the capacitor, A is a 2×2 matrix, which represents the magnitude of current and voltage, respectively. The term $\vec{f}$ corresponds to the current supplied by the external source.

(a) Let $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ and $\vec{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Show that this homogeneous system can result in complex eigenvalues and one of them is $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ (with a corresponding eigenvector $\begin{bmatrix} 1 \\ -4i \end{bmatrix}$).

(b) By using your answer in (a), find the general solution to system (1), in terms of arbitrary constants.

(c) Determine a fundamental matrix $M(t)$ corresponding to homogeneous system described in (a) and (b).

(d) Hence, by employing $\vec{f} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t/2}$, find a particular solution for the system (1) using variation of parameters method.

(e) Determine the solution of system (1), which satisfies the initial conditions $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

[100 marks]

Soalan 1

Suatu litar elektrik mudah boleh digambarkan dengan satu sistem persamaan pembezaan linear:

$$\vec{x}\,' = A\vec{x} + \vec{f}, \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

yang mana x_1 ialah arus melalui suatu pengaruh, x_2 ialah penurunan voltan dalam suatu kapasitor, A ialah matriks 2×2 yang masing-masing mewakili magnitud arus dan voltan. Sebutan $\vec{f}$ ialah arus yang dibekalkan oleh sumber luaran.

(a) Biar $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ dan $\vec{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Tunjukkan sistem homogen ini boleh menghasilkan nilai eigen kompleks dan salah satu daripada nilai eigennya ialah $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ (dengan vektor eigen yang sepadan $\begin{bmatrix} 1 \\ -4i \end{bmatrix}$).

(b) *Dengan menggunakan jawapan anda dalam bahagian (a), cari penyelesaian umum bagi sistem (1) dalam bentuk pemalar sebarangan.*

(c) *Tentukan matriks asas $M(t)$ yang sepadan dengan sistem yang digambarkan dalam bahagian (a) dan (b).*

(d) *Oleh itu, dengan mengambil $\vec{f} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t/2}$,cari penyelesaian khusus bagi sistem (1) dengan menggunakan kaedah perubahan parameter.*

(e) *Tentukan penyelesaian bagi sistem (1) yang memenuhi syarat awal $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.*

[100 markah]

Question 2

Consider the following system of nonlinear differential equations, which represents an ecological interaction between fish species *X* and *Y* that live in an aquatic community:

$$\frac{dX}{dT} = 3X - X^2 - \frac{1}{4}XY,$$
$$\frac{dY}{dT} = XY - 2Y. \qquad (2)$$

(a) Based on system (2), characterise the nature of ecological interaction between these species.

(b) Compute the steady-states for system (2).

(c) For each steady-state calculated in (b), find the corresponding eigenvalues and eigenvectors for the linearised system. Then, classify the nature of each steady-state and determine whether it is stable or unstable.

(d) Construct a phase portrait (i.e. plot *Y vs. X*) to show clearly the behaviour of each steady-state. Based on this graphical analysis, describe the long-term behaviour of interacting species for different initial populations.

(e) Interpret your findings in (a) and (d) from an ecological viewpoint (i.e. what happens to the populations of these two species in the long run).

[100 marks]

Soalan 2

Pertimbangkan sistem persamaan pembezaan tak linear berikut, yang mewakili interaksi ekologi antara spesis ikan X dan Y yang tinggal dalam suatu komuniti akuatik:

$$\frac{dX}{dT} = 3X - X^2 - \frac{1}{4}XY$$
$$\frac{dY}{dT} = XY - 2Y \qquad (2)$$

(a) Berdasarkan sistem (2), cirikan perihal interaksi ekologi antara spesies ini.

(b) Kira keadaan mantap bagi sistem (2).

(c) Untuk setiap satu keadaan mantap yang dikira di bahagian (b), cari nilai eigen dan vektor eigen untuk sistem terlinear. Selepas itu, klasifikasikan perihal setiap satu keadaan mantap yang dikira dan tentukan sama ada keadaan mantap itu adalah stabil atau tak stabil.

(d) Bina potret fasa (iaitu plot Y melawan X) untuk menunjukkan dengan jelas sifat setiap satu keadaan mantap. Berdasarkan analisis grafik ini, terangkan sifat jangka panjang spesis yang berinteraksi bagi populasi awal yang berlainan.

(e) Tafsirkan keputusan anda dalam bahagian (a) dan (d) daripada perspektif ekologi (iaitu merujuk kepada apa yang terjadi terhadap populasi dua spesis ini dalam jangka masa panjang).

[100 markah]

Question 3

(a) Consider a partial-differential equation (PDE):

$$-2u_x + 4u_y + 5u = e^{x+3y} \qquad (3)$$

(i) State the order of this PDE and whether it is homogeneous or inhomogeneous.

(ii) Show that one of the characteristics for this PDE in terms of new variable n is $n = 4x + 2y$.

(iii) By taking $k = -2x + 4y$ as another characteristic in coordinate change, find and express u_x and u_y in terms of u_n and u_k.

(iv) Find a new first-order PDE in terms of $u = u(n, k)$, and then solve for the general solution.

[100 marks]

Soalan 3

(a) *Pertimbangkan persamaan pembezaan separa (PPS):*

$$-2u_x + 4u_y + 5u = e^{x+3y} \qquad (3)$$

(i) *Nyatakan peringkat PPS ini dan sama ada persamaan ini homogen atau tak homogen.*

(ii) *Tunjukkan bahawa salah satu ciri bagi PPS ini dalam bentuk pemboleh ubah baru n ialah* $n = 4x + 2y$.

(iii) *Dengan mengambil* $k = -2x + 4y$ *sebagai ciri yang lain dalam perubahan koordinat, cari dan ungkapkan* u_x *dan* u_y *dalam sebutan* u_n *dan* u_k.

(iv) *Cari PPS peringkat pertama yang baru dalam sebutan* $u = u(n, k)$, *dan seterusnya selesaikan untuk penyelesaian umumnya.*

[100 markah]

Question 4

(a) Consider the following initial-boundary value problem for the heat equation.

$$u_t = \propto^2 u_{xx} + \beta x^2, \quad u = u(x,t) \qquad (4)$$

$$u(0,t) = u_x(1\,,t) = 0, \quad \text{for } t > 0 \qquad (5)$$
$$u(x,0) = x, \quad \text{for } 0 < x < 1 \qquad (6)$$

(i) Classify this PDE, state the order and whether it is homogeneous or inhomogeneous.

(ii) Calculate the steady-state solution to this heat equation.

(iii) Given $\propto = 1$ and $\beta = 0$. Find the eigenfunctions and eigenvalues of the boundary value problem.

(iv) Given $\propto = 1$ and $\beta = 0$. Find the Fourier series solution to this heat equation.

(b) Given the following periodic Sturm-Liouville problem:

$$y'' + \lambda y = 0, \quad (-1 < x < 1) \tag{7}$$

with boundary conditions:

$$y(-1) = y(1) \tag{8}$$
$$y'(-1) = y'(1) \tag{9}$$

By considering the cases of $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ and $\lambda > 0$, find the associated eigenfunctions of this Sturm-Liouville problem.

[100 marks]

Soalan 4

(a) Pertimbangkan masalah nilai sempadan-awal berikut bagi persamaan haba:

$$u_t = \propto^2 u_{xx} + \beta x^2, \quad u = u(x,t) \tag{4}$$

$$u(0,t) = u_x(1,t) = 0, \quad \text{untuk } t > 0 \tag{5}$$
$$u(x,0) = x, \quad \text{untuk } 0 < x < 1 \tag{6}$$

(i) Klasifikasikan PPS ini, nyatakan peringkatnya dan sama ada persamaan ini homogen atau tak homogen.

(ii) Kirakan penyelesaian keadaan mantap bagi persamaan haba ini.

(iii) Diberi $\propto = 1$ dan $\beta = 0$. Cari fungsi eigen dan nilai eigen bagi masalah sempadan ini.

(iv) Diberi $\propto = 1$ dan $\beta = 0$. Cari penyelesaian siri Fourier bagi persamaan haba ini.

(b) Diberi masalah Sturm-Liouville berkala berikut:

$$y'' + \lambda y = 0, \quad (-1 < x < 1) \tag{7}$$

dengan syarat sempadan:

$$y(-1) = y(1) \tag{8}$$
$$y'(-1) = y'(1) \tag{9}$$

Dengan mempertimbangkan kes $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ dan $\lambda > 0$, cari fungsi-fungsi eigen yang berkaitan dengan masalah Sturm-Liouville ini.

[100 markah]

-ooo000ooo-