



First Semester Examination
2017/2018 Academic Session

January 2018

MST564 - Statistical Reliability
[Kebolehpercayaan Statistik]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of **THIRTEEN (13)** pages of printed material before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **TIGA BELAS (13)** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

Instructions: Answer **all eight (8)** questions.

[Arahan: Jawab **semua lapan (8)** soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

Question1

- (a) Explain the difference between reliability and quality with example(s).
- (b) The following table shows the number of components $L(t)$ that still function at time t (in hour). Estimate $R(t)$, $F(t)$, $f(t)$ and $h(t)$.

t	$L(t)$	t	$L(t)$
0	951,483	45	577,822
5	939,197	50	454,548
10	924,609	55	315,982
15	906,554	60	181,765
20	883,342	65	78,221
25	852,554	70	21,577
30	810,900	75	3,011
35	754,191	80	125
40	677,771	85	0

[10 marks]

Soalan 1

- (a) *Jelaskan perbezaan antara kebolehpercayaan dan kualiti dengan memberi contoh.*
- (b) *Jadual berikut menunjukkan bilangan komponen $L(t)$ yang masih beroperasi pada masa t (dalam jam). Anggarkan nilai bagi $R(t)$, $F(t)$, $f(t)$ dan $h(t)$.*

t	$L(t)$	t	$L(t)$
0	951,483	45	577,822
5	939,197	50	454,548
10	924,609	55	315,982
15	906,554	60	181,765
20	883,342	65	78,221
25	852,554	70	21,577
30	810,900	75	3,011
35	754,191	80	125
40	677,771	85	0

[10 markah]

Question 2

- (a) Let X be distributed according to the Weighted Exponential distribution with shape parameter α and scale parameter λ . Its probability density function (pdf) is given by

$$f(x) = \left(\frac{\alpha + 1}{\alpha} \right) \lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\alpha \lambda x}), \quad x \geq 0.$$

Find the survival function and hazard function.

- (b) Let the time to failure of 30 similar components be recorded, censoring at the 20th failure is used. The failure time of 20 components that failed earlier are shown below

0.26 1.49 3.69 4.25 5.43 6.97 8.09 9.47 10.18 10.29
11.04 12.07 13.61 15.07 19.28 24.04 26.16 31.15 38.70 39.89.

- (i) Perform an appropriate analysis of the data.
(ii) What can you conclude from the results obtained in (i)?

[13 marks]

Soalan 2

- (a) Biarkan X ditaburkan mengikut Taburan Wajaran Eksponen dengan parameter bentuk α dan parameter skala λ . Fungsi ketumpatan kebarangkalian (pdf) adalah

$$f(x) = \left(\frac{\alpha + 1}{\alpha} \right) \lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\alpha \lambda x}), \quad x \geq 0.$$

Berikan fungsi kebolehpercayaan dan fungsi kegagalan.

- (b) Katalah masa kegagalan 30 komponen yang serupa dicatatkan, penapisan pada kegagalan ke-20 digunakan. Masa kegagalan 20 komponen yang gagal lebih awal ditunjukkan di bawah

0.26 1.49 3.69 4.25 5.43 6.97 8.09 9.47 10.18 10.29
11.04 12.07 13.61 15.07 19.28 24.04 26.16 31.15 38.70 39.89.

- (i) Lakukan analisis yang sesuai bagi data itu.
(ii) Apakah yang boleh anda simpulkan daripada keputusan yang diperolehi dalam bahagian (i).

[13 markah]

Question 3

The Itwill Fail Company manufactures gizmos for use on widgets. The time to failure (in years), of these gizmos has the following pdf:

$$f(t) = \frac{200}{(t+10)^3}, t \geq 0.$$

- (a) Derive the reliability function and determine the reliability for the first year of operation.
- (b) Compute the MTTF.
- (c) What is the design life for a reliability of 0.95?
- (d) Is the failure rate DFR, CFR or IFR?

[12 marks]

Soalan 3

Syarikat Itwill Fail mengeluarkan gizmo untuk digunakan pada widget. Masa kegagalan (dalam tahun), gizmo-gizmo ini mempunyai PDF berikut:

$$f(t) = \frac{200}{(t+10)^3}, t \geq 0.$$

- (a) *Terbitkan fungsi kebolehpercayaan dan dapatkan kebolehpercayaan untuk beroperasi tahun pertama.*
- (b) *Kira MTTF.*
- (c) *Apakah hayat rekabentuk untuk kebolehpercayaan 0.95?*
- (d) *Adakah kadar kegagalan DFR, CFR atau IFR?*

[12 markah]

Question 4

The following data is obtained from a life test, assuming that it is exponentially distributed with parameter λ . A total of 16 components were tested and the test was terminated after the 12th failure. The life times of the components, in days, are as follows:

1 1 2 3 4 5 6 6 8 8 8 10

- (a) Obtain the expression for the log likelihood function $\ell(\lambda) = \ln L(\lambda)$. Hence, find the maximum likelihood estimator for the parameter λ and the Fisher's Information, $I(\lambda)$.
- (b) Find a 95% confidence interval for the parameter λ and a 95% confidence interval for the component reliability at $t = 8$ days.

[10 marks]

Soalan 4

Data berikut diperoleh daripada satu ujian hayat, dengan anggapan bahawa ianya tertabur secara eksponen dengan parameter λ . Sebanyak 16 komponen telah diuji dan ujian tersebut telah dihentikan selepas kegagalan ke-12. Masa hayat komponen-komponen tersebut, dalam hari, adalah seperti berikut:

1 1 2 3 4 5 6 6 8 8 8 10

- (a) Dapatkan ungkapan bagi log fungsi kebolehjadian $\ell(\lambda) = \ln L(\lambda)$. Seterusnya, dapatkan penganggar kebolehjadian maksimum bagi parameter λ dan Fisher's Information, $I(\lambda)$.
- (b) Dapatkan satu selang keyakinan 95% bagi parameter λ dan satu selang keyakinan 95% kebolehppercayaan komponen pada masa $t = 8$ hari.

[10 markah]

Question 5

The following multiply censored data reflect failure times (in months), of a new laser printer. Censored times (indicated by *) resulted from removals of the printer due to upgrades.

8	33	15*	27	18	24*
13*	12	37	29*	25	30

- (a) Calculate the Kaplan-Meier reliability estimate of the reliability function.
- (b) Interpret the results obtained in (i).
- (c) Determine the reliability of this printer over its 2-year warranty period.

[12 marks]

...5/-

SULIT

Soalan 5

Data banyak kali tapisan yang berikut mencerminkan masa kegagalan (dalam bulan) bagi pencetak laser baru. Masa ditapis adalah kerana penyingkiran pencetak untuk menaik taraf.

8	33	15*	27	18	24*
13*	12	37	29*	25	30

- (a) Kirakan anggaran Kaplan-Meier bagi fungsi hayat.
- (b) Tafsirkan keputusan dalam (i)
- (c) Tentukan kebolehpercayaan pencetak ini sepanjang tempoh jaminan 2 tahun.

[12 markah]

Question 6

Fifteen units each of two different deadbolt locking mechanisms were tested under accelerated conditions until 10 failures of each were observed. The following failure times in thousands of cycles were recorded.

Design A	44, 77, 218, 251, 317, 380, 438, 739, 758, 1115
Design B	32, 63, 211, 248, 327, 404, 476, 877, 903, 1416

- (a) Perform appropriate analyses on the data.
- (b) What can you conclude from your results obtained in part (a)?

[10 marks]

Soalan 6

Lima belas unit pengunci deadbolt dengan setiap satu mempunyai dua mekanisme pengunci deadbolt yang berbeza telah diuji dalam keadaan dipercepat sehingga 10 kegagalan bagi setiap satu pengunci deadbolt diperhatikan. Masa kegagalan berikut dalam ribu kitaran telah direkodkan.

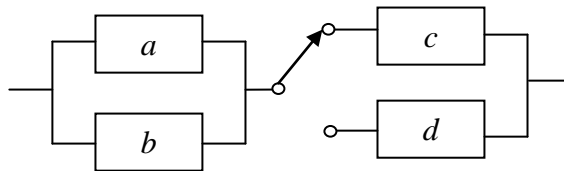
Reka Bentuk A	44, 77, 218, 251, 317, 380, 438, 739, 758, 1115
Reka Bentuk B	32, 63, 211, 248, 327, 404, 476, 877, 903, 1416

- (a) Lakukan analisis yang sesuai bagi data itu.
- (b) Apakah yang boleh anda simpulkan daripada keputusan yang diperolehi dalam bahagian (a).

[10 markah]

Question 7

- (a) What is system reliability? What are the reliability block diagrams for series and parallel systems for two components? Illustrate with examples.
- (b) Consider a system that contains two linked sections in series form in terms of reliability. Suppose the first part consists of two components (*a* and *b*) that are linked in parallel form and the second part consists of two components (*c* and *d*) with *c* operating as the main component and *d* as a backup component. The backup component *d* will be used when the main component *c* fails. Assume the reliability function of components *a*, *b*, *c* and *d* are $R_a(t)$, $R_b(t)$, $R_c(t)$, and $R_d(t)$ respectively.

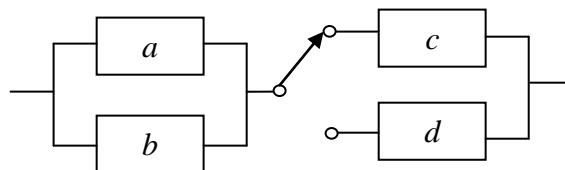


- (i) Find the reliability function of the second part if $R_c(t) = R_d(t) = e^{-\lambda t}$.
- (ii) Express the system reliability function in terms of $R_a(t)$, $R_b(t)$, $R_c(t)$, and $R_d(t)$.
- (iii) Find the mean time to failure if failure rate of the components are constant which equals to λ_1 and λ_2 for *a* and *b*, respectively, and λ for both *c* and *d*.

[18 marks]

Soalan 7

- (a) *Apakah kebolehpercayaan sistem? Apakah kebolehpercayaan gambahajah blok bagi sistem siri dan selari untuk dua komponen? Terangkan dengan contoh.*
- (b) *Pertimbangkan suatu sistem yang mengandungi dua bahagian yang dikaitkan dalam bentuk siri dari segi kebolehpercayaan. Katalah bahagian pertama terdiri daripada dua komponen (*a* dan *b*) yang dikaitkan dalam bentuk selari dan bahagian kedua terdiri daripada dua komponen (*c* dan *d*) dengan *c* beroperasi sebagai komponen utama dan *d* sebagai komponen simpanan. Komponen simpanan *d* akan digunakan bila komponen utama *c* gagal. Andaikan fungsi kebolehpercayaan komponen *a*, *b*, *c* dan *d* ialah $R_a(t)$, $R_b(t)$, $R_c(t)$, dan $R_d(t)$ masing-masing.*



- (i) Carikan fungsi kebolehpercayaan bahagian kedua jika $R_c(t) = R_d(t) = e^{-\lambda t}$.
- (ii) Ungkapkan fungsi kebolehpercayaan sistem dalam sebutan $R_a(t), R_b(t), R_c(t),$ dan $R_d(t)$.
- (iii) Carilah min masa kegagalan sisyem jika kadar kegagalan komponen adalah malar dan sama dengan λ_1 dan λ_2 bagi a dan b masing-masing dan λ bagi kedua-dua c dan d.

[18 markah]

Question 8

In the treatment of certain disorders of the kidney, dialysis may be used to remove waste materials from the blood. One problem that can occur in patients on dialysis is the occurrence of an infection at the site at which the catheter is inserted. In a study to investigate the incidence of infection, the time from insertion of the catheter until infection was recorded for a group of kidney patients. The data in the table below give the number of days from the insertion of the catheter until its removal following the first occurrence of an infection. The data set includes the values of a variable that indicates the infection status of an individual, which takes the value zero if the catheter was removed for a reason other than the occurrence of an infection, and unity otherwise. Also given are the age of each patient in years and a variable that denotes the sex of each patient (1 = male, 2 = female).

Patient	Time (days)	Status	Age (years)	Sex
1	8	1	28	1
2	15	1	44	2
3	22	1	32	1
4	24	1	16	2
5	30	1	10	1
6	54	0	42	2
7	119	1	22	2
8	141	1	34	2
9	185	1	60	2
10	292	1	43	2
11	402	1	30	2
12	447	1	31	2
13	536	1	17	2

- (a) Summarize the data set in the table before a more detailed analysis is performed.
- (b) What is the objective of this study?
- (c) Having determined the objective in part (b), what is an appropriate method to achieve this objective?
- (d) Using the proposed methodology in part (c), perform the detailed analysis on the data set in the table.
- (e) From the results obtained in part (d), what can you conclude?

[15 marks]

Soalan 8

Dalam rawatan penyakit buah pinggang tertentu, dialisis boleh digunakan untuk membuang bahan-bahan buangan dari darah. Salah satu masalah yang boleh berlaku pada pesakit yang menjalani dialisis adalah terjadinya jangkitan di tapak di mana kateter dimasukkan. Dalam satu kajian yang untuk menyiasat kejadian infeksi, masa dari penyisipan kateter sehingga jangkitan telah dicatatkan bagi sekumpulan pesakit buah pinggang. Data dalam jadual di bawah memberikan bilangan hari dari penyisipan kateter sampai penyingkiran berikutan kejadian pertama jangkitan. Set data merangkumi nilai-nilai pembolehubah yang menunjukkan status jangkitan dari seorang individu, yang mengambil nilai sifar jika kateter itu dikeluarkan kerana alasan selain daripada berlakunya jangkitan, dan perpaduan sebaliknya. Juga diberikan adalah usia setiap pesakit dalam tahun dan pembolehubah yang menunjukkan jantina setiap pesakit (1 = lelaki, 2 = perempuan).

Pesakit	Masa (hari)	Status	Umur (tahun)	Jantina
1	8	1	28	1
2	15	1	44	2
3	22	1	32	1
4	24	1	16	2
5	30	1	10	1
6	54	0	42	2
7	119	1	22	2
8	141	1	34	2
9	185	1	60	2
10	292	1	43	2
11	402	1	30	2
12	447	1	31	2
13	536	1	17	2

- (a) *Ringkaskan kumpulan data dalam jadual sebelum analisis yang lebih terperinci boleh dilakukan.*
- (b) *Apakah objektif kajian ini?*
- (c) *Setelah menetapkan objektif dalam bahagian (b), apakah kaedah yang sesuai untuk mencapai matlamat ini?*
- (d) *Dengan menggunakan kaedah yang dicadangkan dalam bahagian (c), lakukan analisis terperinci mengenai data dalam jadual di atas.*
- (e) *Dari keputusan yang diperolehi dalam bahagian (d), apakah yang dapat disimpulkan?*

[15 markah]

APPENDIX / APPENDIKS**Summary of Reliability Formulae / Ringkasan Rumus-Rumus Kebolehpercayaan**

$$F(t) = \int_0^t f(t)dt$$

$$R(t) = 1 - F(t)$$

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = -\frac{dR(t)}{dt}$$

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

$$H(t) = \int_0^t h(t)dt$$

$$R(t) = e^{-H(t)}$$

$$H(t) = -\ln R(t)$$

$$MTTF = \int_0^{\infty} tf(t)dt = \int_0^{\infty} R(t)dt$$

APPENDIX (contd) / APPENDIKS (sambung)**Summary of Reliability Formulae (contd) / Ringkasan Rumus-Rumus Kebolehpercayaan (sambung)**

Lifetime following an **Exponential Distribution**: / *Masahayat mengikut Taburan Eksponen*:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

$$h(t) = \lambda$$

$$H(t) = \lambda t$$

$$MTTF = \frac{1}{\lambda}$$

Lifetime following a **Weibull Distribution**: / *Masahayat mengikut Taburan Weibull*:

$$f(t) = \beta \alpha^{-\beta} t^{\beta-1} \exp \left[- \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta} \right]$$

$$F(t) = 1 - e^{- \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta}}$$

$$R(t) = e^{- \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta}}$$

$$h(t) = \beta \alpha^{-\beta} t^{\beta-1}$$

$$H(t) = \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta}$$

$$MTTF = \alpha \Gamma \left(1 + \frac{1}{\beta} \right)$$

$$\text{Design Life} = t_R = \alpha (-\ln R)^{1/\beta}$$

APPENDIX (contd) / APPENDIKS (sambung)**Summary of Reliability Formulae (contd) / Ringkasan Rumus-Rumus Kebolehpercayaan (sambung)**Lifetime following a **Normal Distribution:** / *Masahayat mengikut Taburan Normal:*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(t-\mu)^2}{\sigma^2}\right]$$

$$F(t) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$$

$$R(t) = 1 - \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$$

$$h(t) = \frac{f(t)}{1 - \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)}$$

Lifetime following a **Lognormal Distribution:** / *Masahayat mengikut Taburan Lognormal:*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}st} \exp\left[-\frac{1}{2s^2} \left(\ln \frac{t}{t_{median}}\right)^2\right]$$

$$F(t) = \Phi\left(\frac{1}{s} \ln \frac{t}{t_{median}}\right)$$

$$R(t) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{s} \ln \frac{t}{t_{median}}\right)$$

$$MTTF = t_{median} \exp\left(\frac{s^2}{2}\right)$$

$$t_R = t_{median} \exp(s z_{1-R})$$

-00000000-