First Semester Examination
2017/2018 Academic Session

January 2018

MSS 415 Introductory Functional Analysis and Topology
[Pengantar Analisis Fungsian dan Topologi]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all five** [5] questions.

*[Arahan: Jawab **semua lima** [5] soalan.]*

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai.]

1. Give an example for each of the following:
   (a) A complete normed space.
   (b) A metric space but not a normed space.
   (c) A normed space but not an inner product space.
   (d) A nonseparable normed space.
   (e) An unbounded linear operator on normed space.
   (f) An infinite dimensional normed space and its dual space.
   (g) A nonlinear functional on a Hilbert space.

[40 marks]

1. Beri satu contoh untuk setiap yang berikut:
   (a) Ruang norma lengkap.
   (b) Ruang metrik tapi bukan ruang norma.
   (c) Ruang norma tapi bukan ruang hasil darab terkedalam.
   (d) Ruang norma tak terpisahkan.
   (e) Pengoperasi linear tak terbatas pada ruang norma.
   (f) Ruang norma berdimensi tak terhingga dan ruang dualnya.
   (g) Fungsian tak linear pada ruang Hilbert.

[40 markah]

2. Let $X = (X, d)$ be a metric space.
   (a) (i) Define an open set and a closed set in X.
   (ii) For every $r > 0$ and $a \in X$, show that the open ball
   $$B(a; r) = \{\, y \in X : d(a, y) < r\}$$
   is an open set.
   (b) If d is the discrete metric, show that every subset of X is both open and closed.
   (c) (i) What does it mean for X to be separable?
   (ii) If X is separable, show that X has a countable subset Y such that for every $\epsilon > 0$, the open ball $B(a, \epsilon)$ of X contains an element y of Y.

[60 marks]

2. Andaikan $X = (X, d)$ suatu ruang metrik.
   (a) (i) Beri takrif untuk set terbuka dan set tertutup dalam X.
   (ii) Untuk setiap $r > 0$ dan $a \in X$, tunjukkan bahawa bola terbuka
   $$B(a; r) = \{\, y \in X : d(a, y) < r\}$$
   ialah set terbuka.
   (b) Jika d ialah metrik diskret, tunjukkan bahawa semua subset untuk X adalah terbuka dan tertutup.
   (c) (i) Apakah maksud X terpisahkan?
   (ii) Jika X terpisahkan, tunjukkan bahawa X mempunyai subset terbilangkan Y sedemikian untuk semua $\epsilon > 0$, bola terbuka $B(a, \epsilon)$ dalam X mengandungi satu unsur y daripada Y.

[60 markah]

3. Let $X = (X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ be a Hilbert space (over $\mathbb{C}$), and $\| \cdot \|$ be the induced norm on X.

   (a) Let x and y be any two elements in X. Prove the paralellogram identity
   $$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

   (b) Let Y be a nonempty closed subspace of X, and x be a fixed element in X.
   (i) Show that there exists $y \in Y$ such that
   $$\|x-y\| = \inf_{\tilde{y} \in Y} \|x - \tilde{y}\|.$$
   (ii) Show that there exists $z \in Y^{\perp}$ such that
   $$x = y + z,$$
   for some $y \in Y$, and $Y^{\perp}$ denote the orthogonal complement of Y.
   (iii) It is known that the existence of y and z in part (ii) are unique. By using this fact, deduce that
   $$X = Y \oplus Y^{\perp},$$
   where the symbol $\oplus$ denote the direct sum.

[100 marks]

3. *Andaikan $X = (X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ suatu ruang Hilbert (atas $\mathbb{C}$), dan $\| \cdot \|$ norma teraruh pada X.*

   (a) Andaikan x dan y sebarang dua unsur dalam X. Buktikan identiti segi empat selari
   $$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

   (b) Andaikan Y subruang tak kosong yang tertutup pada X, dan x suatu unsur tetap dalam X.
   (i) Tunjukkan bahawa wujud $y \in Y$ sedemikian rupa
   $$\|x-y\| = \inf_{\tilde{y} \in Y} \|x - \tilde{y}\|.$$
   (ii) Tunjukkan bahawa wujud $z \in Y^{\perp}$ supaya
   $$x = y + z,$$
   untuk suatu $y \in Y$ dan $Y^{\perp}$ menandakan pelengkap ortogon kepada Y.
   (iii) Adalah diketahui bahawa kewujudan y dan z di bahagian (ii) adalah unik. Dengan menggunakan fakta ini, deduksikan bahawa
   $$X = Y \oplus Y^{\perp},$$
   yang mana simbol $\oplus$ menandai hasil tambah langsung.

[100 markah]

4. (a) Let $T : X \to Y$ be a bounded linear operator from a normed space $(X, \|\cdot\|_X)$ into a normed space $(Y, \|\cdot\|_Y)$.
The *norm* $\|T\|$ of the operator T is defined by

$$\|T\| := \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}.$$

(i) Deduce that $\|Tx\|_Y \leq \|T\| \, \|x\|_X$.
(ii) Show that the norm of T is also given by

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X = 1}} \|Tx\|_Y.$$

(iii) For any sequence $\{x_n\}$ in X that converges to x, show that $\{Tx_n\}$ converges to Tx.
(iv) Show that the null space

$$N(T) = \{x \in X : Tx = 0\}$$

of T is a closed set in X.

(b) If z is any fixed element of an inner product space $X = (X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, show that $f(x) = \langle x, z \rangle$ defines a bounded linear functional f on X, with norm $\|z\|$.

[100 marks]

4. (a) Andaikan $T : X \to Y$ suatu pengoperasi linear terbatas daripada ruang norma $(X, \|\cdot\|_X)$ kepada ruang norma $(Y, \|\cdot\|_Y)$.
Norma $\|T\|$ *untuk pengoperasi T ditakrifkan sebagai*

$$\|T\| := \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}.$$

(i) Deduksikan bahawa $\|Tx\|_Y \leq \|T\| \, \|x\|_X$.
(ii) Tunjukkan bahawa norma untuk T juga diberikan oleh

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X = 1}} \|Tx\|_Y.$$

(iii) Untuk sebarang jujukan $\{x_n\}$ dalam X yang menumpu ke x, tunjukkan bahawa $\{Tx_n\}$ menumpu ke Tx.
(iv) Tunjukkan bahawa ruang nol

$$N(T) = \{x \in X : Tx = 0\}$$

untuk T adalah set tertutup dalam X.

(b) Jika z adalah sebarang unsur tetap dalam ruang hasil darab terkedalam $X = (X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, tunjukkan bahawa $f(x) = \langle x, z \rangle$ menakrifkan satu fungsian linear terbatas f pada X, dengan norma $\|z\|$.

[100 markah]

5. Let $X = (X, \|\cdot\|)$ be a normed space.

(a) A *sublinear functional* on X is a real-valued functional p satisfying

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \qquad \text{and} \qquad p(\alpha x) = \alpha p(x),$$

for all x, $y \in X$ and scalar $\alpha \geq 0$.
(i) Show that $p(0) = 0$ and $-p(-x) \leq p(x)$ for all $x \in X$.
(ii) If $p(x) = |\, f(x)|$, for some nonzero linear functional f on X, show that p is sublinear but not linear.

(b) State the Hahn-Banach Theorem for X.

(c) Let $x_0 \neq 0$ be any element of X and consider the subspace Z of X consisting of all elements $x = \alpha x_0$, where α is a scalar. Define a linear functional f on Z by

$$f(x) = \alpha \|\, x_0\|.$$

(i) Show that f is bounded and has norm $\|f\| = 1$.
(ii) Show that there exists a bounded linear functional $\tilde{f}$ on X such that

$$\|\tilde{f}\| = 1, \qquad \tilde{f}(x_0) = \|\, x_0\|.$$

[100 marks]

5. Andaikan $X = (X, \|\cdot\|)$ suatu ruang norma.

(a) Fungsian sublinear *pada X ialah fungsian p bernilai nyata yang memenuhi*

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \qquad \textit{and} \qquad p(\alpha x) = \alpha p(x),$$

untuk semua x, $y \in X$ dan pemalar $\alpha \geq 0$.
(i) Tunjukkan bahawa $p(0) = 0$ dan $-p(-x) \leq p(x)$ untuk semua $x \in X$.
(ii) Jika $p(x) = |\, f(x)|$, untuk suatu fungsian linear tak sifar f pada X, tunjukkan bahawa p adalah sublinear tapi tak linear.

(b) Nyatakan Teorem Hahn-Banach untuk X.

(c) Andaikan $x_0 \neq 0$ sebarang unsur dalam X dan pertimbangkan subruang Z pada X yang terdiri daripada semua unsur $x = \alpha x_0$, yang mana α ialah pemalar. Takrifkan fungsian linear f pada Z sebagai

$$f(x) = \alpha \|\, x_0\|.$$

(i) Tunjukkan bahawa f adalah terbatas dan mempunyai norma $\|f\| = 1$.
(ii) Tunjukkan bahawa wujud suatu fungsian linear terbatas $\tilde{f}$ pada X sedemikian

$$\|\tilde{f}\| = 1, \qquad \tilde{f}(x_0) = \|\, x_0\|.$$

[100 markah]

- ooo O ooo -