First Semester Examination
2017/2018 Academic Session

January 2018

MAT323 - Differential Equations II
[Persamaan Pembezaan II]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of **SIX (6)** pages of printed material before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **ENAM (6)** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

Instructions: Answer **all four (4)** questions.

*[**Arahan:** Jawab **semua empat (4)** soalan.]*

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

Question 1

Suppose we have a homogeneous linear system:

$$\vec{x}\,' = A\vec{x}\,, \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0 \tag{1}$$

where A is a 2×2 matrix with constant elements. Given that A has a complex eigenvalue $\lambda = \alpha + i\beta$ with corresponding eigenvector $\vec{w} = \vec{u} + i\vec{v}$ ($\vec{u}$ and $\vec{v}$ consist of real-valued elements).

(a) If $\vec{x}_1$ and $\vec{x}_2$ are the components of solution to system (1), show that the real-valued solutions of $\vec{x}_1$ and $\vec{x}_2$ are given by

$$\vec{x}_1(t) = e^{\alpha t}(\vec{u}\cos\beta t - \vec{v}\,\sin\beta t)$$
$$\vec{x}_2(t) = e^{\alpha t}(\vec{u}\sin\beta t + \vec{v}\,\cos\beta t)$$

(b) Let $A = \begin{bmatrix} 7 & 15 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$. Using the result in (a), find the general solution to system (1), in terms of arbitrary constants.

(c) Given that $\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$. By employing matrix exponential method, find the arbitrary constants for the solution in (b) and the resulting solution to system (1).

(d) For an inhomogeneous linear system, Equation (1) becomes:

$$\vec{x}\,' = B\vec{x} + \vec{f} \tag{2}$$

where B is a constant matrix and $\vec{f}$ corresponds to the inhomogeneous term. Now, consider $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ and $\vec{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}$. Find a particular solution for system (2) using variation of parameters method.

[100 marks]

Soalan 1

Andaikan kita mempunyai suatu sistem homogen linear:

$$\vec{x}\,' = A\vec{x}\,, \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0 \tag{1}$$

di mana A adalah matriks 2×2 *dengan nilai pemalar. Diberi A mempunyai nilai eigen kompleks* $\lambda = \alpha + i\beta$ *dan vektor eigen yang sepadan ialah* $\vec{w} = \vec{u} + i\vec{v}$ *(*$\vec{u}$ *dan* $\vec{v}$ *terdiri daripada elemen yang bernilai nyata).*

(a) Jika $\vec{x}_1$ *dan* $\vec{x}_2$ *adalah komponen yang membentuk penyelesaian kepada sistem (1), tunjukkan bahawa penyelesaian nyata bagi* $\vec{x}_1$ *dan* $\vec{x}_2$ *adalah:*

$$\vec{x}_1(t) = e^{\alpha t}(\vec{u}\,cos\,\beta t - \vec{v}\,\,sin\,\beta t)$$
$$\vec{x}_2(t) = e^{\alpha t}(\vec{u}\,sin\,\beta t + \vec{v}\,\,cos\,\beta t)$$

(b) *Biar* $A = \begin{bmatrix} 7 & 15 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$. *Dengan menggunakan keputusan di bahagian (a), cari penyelesaian umum bagi sistem (1), dalam bentuk pemalar sebarangan.*

(c) *Diberi* $\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$. *Dengan menggunakan kaedah eksponen matriks, cari nilai pemalar sebarangan untuk penyelesaian di bahagian (b) dan penyelesaian yang terhasil untuk sistem (1).*

(d) *Bagi sebuah sistem linear tak homogen, persamaan (1) menjadi:*

$$\vec{x}\,' = B\vec{x} + \vec{f} \qquad (2)$$

di mana B ialah matriks dengan elemen pemalar dan $\vec{f}$ *mewakili sebutan tak homogen. Sekarang, pertimbangkan* $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ *dan* $\vec{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}$. *Cari penyelesaian khusus bagi sistem (2) dengan menggunakan kaedah perubahan parameter.*

[100 markah]

Question 2

Consider the following system of nonlinear differential equations, which represents competitive interactions between animal species *X* and *Y* that live in a forest ecosystem:

$$\frac{dX}{dT} = \frac{1}{6}X(9 - X - 2Y)$$
$$\frac{dY}{dT} = 3Y\left(4 - \frac{1}{3}X - Y\right) \qquad (3)$$

(a) Compute the steady-states for system (3).

(b) For each steady-state calculated in (a), find the corresponding eigenvalues and eigenvectors for the linearised system. Then, classify the nature of each steady-state and determine whether it is stable or unstable.

(c) Sketch the phase portrait (i.e. plot *Y vs. X*) to show clearly the behaviour of each steady-state.

(d) Interpret your results in (c) from an ecological viewpoint (i.e. in terms of the populations of these two species).

[100 marks]

Soalan 2

Pertimbangkan sistem persamaan tak linear berikut, yang mewakili persaingan antara spesis haiwan X dan Y yang tinggal dalam satu ekosistem hutan:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dT} &= \frac{1}{6}X(9 - X - 2Y) \\ \frac{dY}{dT} &= 3Y\left(4 - \frac{1}{3}X - Y\right) \end{aligned} \qquad (3)$$

(a) Kira keadaan mantap bagi sistem (3).

(b) Untuk setiap satu keadaan mantap yang dikira di bahagian (a), cari nilai eigen dan vektor eigen untuk sistem terlinear. Selepas itu, klasifikasikan perihal setiap satu keadaan mantap yang dikira dan tentukan sama ada keadaan mantap itu adalah stabil atau tak stabil.

(c) Lakarkan potret fasa (iaitu plot Y melawan X) untuk menunjukkan dengan jelas perihal setiap satu keadaan mantap.

(d) Tafsirkan keputusan anda dalam bahagian (c) daripada perspektif ekologi (iaitu merujuk kepada populasi antara dua spesis ini).

[100 markah]

Question 3

Consider a second-order partial-differential equation (PDE):

$$8u_{xx} - 6u_{xy} + u_{yy} = -4 \qquad (4)$$

where $u = u(x, y)$:

(a) Classify the type of PDE in (4).

(b) Show that the characteristics for this PDE are $k = x + 2y$ and $n = x + 4y$.

(c) Hence, find and express u_{xx}, u_{xy} and u_{yy} in terms of u_{kk}, u_{kn} and u_{nn}.

(d) Show that the new second-order PDE is $u_{kn} = 1$, where $u = u(k, n)$, and then solve it.

(e) Find a unique solution that satisfies the following boundary conditions: $u(x, 0) = \cosh(x)$ and $u_y(x, 0) = 2\sinh(x)$.

[100 marks]

Soalan 3

Pertimbangkan persamaan pembezaan separa (PPS) peringkat kedua:

$$8u_{xx} - 6u_{xy} + u_{yy} = -4 \qquad (4)$$

dengan $u = u(x, y)$.

(a) *Klasifikasikan jenis PPS dalam persamaan (4).*

(b) *Tunjukkan ciri-ciri untuk PPS ini adalah* $k = x + 2y$ *dan* $n = x + 4y$.

(c) *Oleh itu, cari dan ungkapkan* u_{xx}, u_{xy} *dan* u_{yy} *dalam sebutan* u_{kk}, u_{kn} *dan* u_{nn}.

(d) *Tunjukkan bahawa PPS peringkat kedua yang baru ialah* $u_{kn} = 1$, *dengan* $u = u(k, n)$, *dan seterusnya selesaikan persamaan ini.*

(e) *Cari penyelesaian unik yang memenuhi syarat sempadan berikut:* $u(x, 0) = cosh(x)$ *dan* $u_y(x, 0) = 2sinh(x)$.

[100 markah]

Question 4

(a) Consider the heat equation:

$$u_t = Du_{xx}, \quad u = u(x, t) \qquad (5)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \qquad t > 0 \qquad (6)$$
$$u(x, 0) = f(x), \qquad 0 < x < L \qquad (7)$$

(i) By using separation of variables (i.e. taking $u(x, t) = X(x)T(t)$), find the eigenfunctions $X_n(x)$ and eigenvalues λ_n for the boundary-value problem (5) – (6).

(ii) Hence, find the solution for $T_n(t)$. Then, find the formal series solutions for $u(x, t)$ and determine Fourier sine coefficients that satisfy the initial condition (7).

(iii) Suppose that an aluminium rod (with thermal diffusivity constant 0.85 cm^2/s) of length 50 cm is immersed in steam until its temperature is $100\ ^oC$ throughout. Initially, its lateral surface is insulated and its two ends are imbedded in ice at $0\ ^oC$. Find the rod's temperature function and the corresponding Fourier coefficients.

(b) Consider the following Sturm-Liouville problem:

$$y'' + \lambda y = 0, \quad (0 < x < 1) \qquad (8)$$

with boundary conditions:

$$y(0) + y'(0) = 0 \quad (9)$$
$$y(1) = 0 \quad (10)$$

(i) Show that the eigenfunction is $y_0(x) = x - 1$ when the eigenvalue is $\lambda_0 = 0$.

(ii) Then, show that the eigenvalues and eigenfunctions of this Sturm-Liouville problem are given by $\lambda_n = {\beta_n}^2$ and $y_n(x) = \beta_n \cos(\beta_n x) - \sin(\beta_n x)$ for $n \geq 1$, where β_n are the n-th root of $\tan(x) = x$.

[100 marks]

Soalan 4

(a) *Pertimbangkan persamaan haba berikut:*

$$u_t = Du_{xx}, \quad u = u(x,t). \quad (5)$$

$$u(0,t) = u(L\,,t) = 0, \qquad t > 0 \quad (6)$$
$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 < x < L \quad (7)$$

(i) *Dengan menggunakan kaedah pemisahan pembolehubah (iaitu dengan mengambil $u(x,t) = X(x)T(t)$), cari fungsi eigen $X_n(x)$ dan nilai eigen λ_n untuk masalah nilai sempadan (5) – (6).*

(ii) *Oleh itu, cari penyelesaian untuk $T_n(t)$. Seterusnya, cari penyelesaian siri formal untuk $u(x,t)$ dan tentukan pekali sinus Fourier yang memenuhi syarat awal (7).*

(iii) *Pertimbangkan sebatang rod aluminium (dengan pemalar resapan terma $0.85\ cm^2/s$) yang panjangnya ialah 50 cm. Rod ini diletakkan dalam stim sehingga suhunya mencecah $100\ ^oC$. Pada awalnya, permukaan sisinya adalah terlindung dan kedua-dua hujungnya diletakkan ais yang bersuhu $0\ ^oC$. Cari fungsi suhu bagi rod ini dan juga pekali Fouriernya.*

(b) *Pertimbangkan masalah Sturm-Liouville berikut:*

$$y'' + \lambda y = 0, \quad (0 < x < 1) \quad (8)$$

dengan nilai sempadan:

$$y(0) + y'(0) = 0 \quad (9)$$
$$y(1) = 0 \quad (10)$$

(i) *Tunjukkan fungsi eigen ialah $y_0(x) = x - 1$ apabila nilai eigen ialah $\lambda_0 = 0$,*

(ii) *Seterusnya, tunjukkan nilai eigen dan fungsi eigen masalah Sturm-Liouville ini diberikan oleh $\lambda_n = {\beta_n}^2$ dan $y_n(x) = \beta_n\, cos(\beta_n x) - sin(\beta_n x)$ untuk $n \geq 1$, di mana β_n adalah punca ke-n untuk persamaan $tan(x) = x$.*

[100 markah]

- ooo00ooo -