First Semester Examination
2017/2018 Academic Session

January 2018

# MAT100 - Mathematical Foundations
# *[Matematik Asas]*

Duration : 3 hours
*[Masa : 3 jam]*

Please check that this examination paper consists of **TEN (10)** pages of printed material before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **SEPULUH (10)** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

**Instructions**: Answer **all six (6)** questions.

*[**Arahan:** Jawab **semua enam (6)** soalan.]*

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

*[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].*

**Question 1**

(a) Write the negation of each statement. (Trivial answer obtained simply by putting "It is not the case that" in front of the original statement or by something similar is not acceptable.)

(i) $n$ is a factor of $3000$ and $n$ is not divisible by 5.

(ii) If logic is easy, then I am a monkey's uncle.

(iii) Every perfect square is not prime.

[ 30 marks ]

(b) Rewrite the following statement in if-then form.

(i) Being a math major is a sufficient condition for Sam to take MATH362.

(ii) Sam takes MATH362 only if he is a math major.

(iii) Being a math major is a necessary condition for Sam to take MATH362.

[ 18 marks ]

(c) Indicate the truth value of each of the following statement (without justification).

(i) If $0 = 1$ then Donald Trump is the current president of the United States.

(ii) A relation from $B$ to $A$ is a subset of $A \times B$.

(iii) $\mathbb{Q}$ is countable or $\mathbb{Q}$ is uncountable.

(iv) $\{1\} \in \{1, \{1, \{1\}\}\}$.

(v) Assume the disjunction of $p$ or $q$ is true and $q$ is true. Then $p$ must be false.

(vi) $p \to q$ is logically equivalent to $q \to p$.

(vii) $\{1, 2, 2, 3, 3, 3\} = \{3, 2, 2, 1, 1, 1\}$.

(viii) $p \wedge \neg p$ is a tautology.

[ 32 marks ]

(d) Assume the following two statements are true, where $r$ and $s$ are real numbers.
$p$: For all real numbers $x$ and $y$, if $x$ and $y$ are rational, then $x+y$ is rational.
$q$: The sum $r+s$ is irrational.
Show that $r$ is irrational or $s$ is irrational.

[ 20 marks ]

***Soalan 1***

*(a)* *Tulis penafian bagi setiap pernyataan. (Jawapan yang remeh dengan meletakkan "Tidak boleh berlaku kes sedemikian bahawa" di depan pernyataan asal atau melalui suatu cara yang serupa tidak boleh diterima.)*

*(i)* $n$ *ialah factor bagi* $3000$ *dan* $n$ *tidak boleh dibahagikan dengan* $5$.

*(ii)* *Jika logik adalah senang, maka saya ialah bapa saudara monyet.*

*(iii)* *Setiap nombor kuasa dua sempurna bukan nombor perdana.*

*[ 30 markah ]*

*(b)* *Tulis semula pernyataan berikut dalam bentuk jika-maka.*

*(i)* *Merupakan pelajar matematik ialah syarat cukup untuk Sam mengambil MATH362.*

*(ii)* *Sam mengambil MATH362 hanya jika dia merupakan pelajar matematik.*

*(iii)* *Merupakan pelajar matematik ialah syarat perlu untuk Sam mengambil MATH362.*

*[ 18 markah ]*

*(c)* *Berikan nilai kebenaran setiap pernyataan yang berikut (tanpa penjelasan).*

*(i)* *Jika* $0=1$ *maka Donald Trump ialah presiden Amerika Syarikat sekarang.*

*(ii)* *Suatu hubungan dari* $B$ *ke* $A$ *ialah subset kepada* $A\times B$.

*(iii)* $\mathbb{Q}$ *adalah terbilangkan atau* $\mathbb{Q}$ *adalah tak terbilangkan.*

*(iv)* $\{1\}\in\left\{1,\{1,\{1\}\}\right\}$.

*(v)* *Andaikan disjungsi* $p$ *atau* $q$ *adalah benar dan* $q$ *adalah benar. Maka* $p$ *semestinya palsu.*

*(vi)* $p\to q$ *adalah setara secara logic dengan* $q\to p$.

*(vii)* $\{1,2,2,3,3,3\}=\{3,2,2,1,1,1\}$.

*(viii)* $p\wedge\neg p$ *ialah tautologi.*

*[ 32 markah ]*

(d) *Andaikan kedua-dua pernyataan berikut adalah benar, sedangkan $r$ dan $s$ ialah nombor nyata.*

*$p$: Bagi semua nombor nyata $x$ dan $y$, jika $x$ dan $y$ ialah nombor nisbah, maka $x+y$ ialah nombor nisbah.*

*$q$: Hasil tambah $r+s$ ialah nombor tak nisbah.*

*Tunjukkan bahawa $r$ ialah nombor tak nisbah atau $s$ ialah nombor tak nisbah.*

*[ 20 markah ]*

**Question 2**

(a) Is each of the following statements true or false? Provide some justification.

(i) For every $x \in \mathbb{R}$, if $x^2 = 4$ then $x = 2$.

(ii) There exists $y \in \mathbb{Z}$ such that y is even and y is prime.

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$.

(iv) $\exists y \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathbb{R}^+, x < xy$.

[ 40 marks ]

(b) Let $D = \{-3,3\}$ and $E = \{-9,9\}$. Is each of the following statements true or false? Justify your answer.

(i) $\forall x \in D\ \exists y \in E,\ x^2 = y$.

(ii) $\exists y \in E\ \forall x \in D,\ x^2 = y$.

(iii) $\exists x \in D\ \exists x \in E,\ x + y = 6$.

[ 30 marks ]

(c) Using the fact that $p \to (q \vee r)$ is logically equivalent to $(p \vee \neg q) \to r$, rewrite the following statement:

"If $n$ is a prime, then $n$ is odd or $n$ is 2."

[ 15 marks ]

(d) Prove that the empty set is a subset of every set.

[ 15 marks ]

***Soalan 2***

(a) *Adakah setiap pernyataan yang berikut benar atau palsu? Berikan justifikasi.*

(i) *Untuk setiap* $x \in \mathbb{R}, jika\ x^2 = 4\ maka\ x = 2.$

(ii) *Wujud* $y \in \mathbb{Z}$ *sedemikian bahawa* $y$ *adalah genap dan* $y$ *ialah nombor perdana.*

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0.$

(iv) $\exists y \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathbb{R}^+, x < xy.$

*[ 40 markah ]*

(b) *Biarkan* $D = \{-3,3\}$ *dan* $E = \{-9,9\}$. *Adakah setiap pernyataan yang berikut benar atau palsu? Jelaskan jawapan anda.*

(i) $\forall x \in D\ \exists y \in E, x^2 = y.$

(ii) $\exists y \in E\ \forall x \in D,\ x^2 = y.$

(iii) $\exists x \in D\ \exists x \in E,\ x + y = 6.$

*[ 30 markah ]*

(c) *Dengan menggunakan fakta bahawa* $p \to (q \vee r)$ *adalah setara secara logik dengan* $(p \vee \neg q) \to r$, *tulis semula pernyataan berikut:*

*“ Jika* $n$ *ialah nombor perdana, maka* $n$ *adalah ganjil atau* $n$ *ialah 2.”*

*[ 15 markah ]*

(d) *Buktikan bahawa set kosong ialah subset kepada setiap set.*

*[ 15 markah ]*

**Question 3**

(a) Prove that the sum of any two odd integers is even.

[ 25 marks ]

(b) Prove that the difference of the squares of any two consecutive integers is odd.

[ 25 marks ]

(c) Prove that for all integers $m$ and $n$, if the remainder is 5 when $m$ is divided by 7 and the remainder is 6 when $n$ is divided by 7, then the remainder is 2 when $mn$ is divided by 7.

[ 30 marks ]

(d) Prove that $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ is irrational. You may use some elementary properties of rational numbers and the fact that $\sqrt{6}$ is irrational in your proof.

[ 20 marks ]

***Soalan 3***

*(a) Buktikan bahawa hasil tambah setiap dua integer ganjil adalah genap.*

*[ 25 markah ]*

*(b) Buktikan bahawa beza sebarang dua kuasa dua integer berturutan adalah ganjil.*

*[ 25 markah ]*

*(c) Buktikan bahawa bagi semua integer $m$ dan $n$, jika baki ialah 5 apabila $m$ dibahagikan dengan 7 dan baki ialah 6 apabila $n$ dibahagikan dengan 7, maka baki ialah 2 apabila $mn$ dibahagikan dengan 7.*

*[ 30 markah ]*

*(d) Buktikan bahawa $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ialah nombor tak nisbah. Anda boleh menggunakan sifat-sifat asas nombor-nombor nisbah dan fakta bahawa $\sqrt{6}$ ialah nombor tak nisbah dalam bukti anda.*

*[ 20 markah ]*

**Question 4**

(a) Prove that for all positive integers $n, r,$ and $s,$ if $rs \le n$ then $r \le \sqrt{n}$ or $s \le \sqrt{n}$ .

[ 25 marks ]

(b) Prove that for all integers $a, b,$ and $c,$ if $a \mid b$ and $a \mid c$ , then $a \mid (3b - 2c)$ .

[25 marks]

(c) Suppose $m$ and $n$ are prime numbers such that

$$5^3 \cdot 3^5 \cdot 7^2 \cdot m = 7 \cdot 5 \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot n.$$

What are the values of $m$ and $n$? Justify your answer by stating simply the name of the theorem that applies.

[ 15 marks ]

(d) Prove that the square of any integer has the form $3k$ or $3k+1$ for some integer k.

[ 35 marks ]

***Soalan 4***

*(a) Buktikan bahawa bagi semua integer positif $n, r,$ dan $s,$ jika $rs \le n$ maka $r \le \sqrt{n}$ atau $s \le \sqrt{n}$ .*

*[ 25 markah ]*

*(b) Buktikan bahawa bagi semua integer $a, b,$ dan $c,$ jika $a \mid b$ dan $a \mid c$ , maka $a \mid (3b - 2c)$ .*

*[25 markah ]*

*(c) Andaikan $m$ dan $n$ ialah nombor perdana sedemikian bahawa*

$$5^3 \cdot 3^5 \cdot 7^2 \cdot m = 7 \cdot 5 \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot n.$$

*Apakah nilai-nilai $m$ dan $n$? Jelaskan jawapan anda dengan hanya menyatakan nama teorem yang berkenaan.*

*[ 15 markah ]*

*(d) Buktikan bahawa kuasa dua setiap integer mempunyai bentuk $3k$ atau $3k+1$ bagi suatu integer k.*

*[ 35 markah ]*

**Question 5**

(a) Prove the following by mathematical induction:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

for all integers n ≥ 1.

[ 50 marks ]

(b) Prove the following by mathematical induction:

$$2^n > n^2 \text{ for all integers } n \geq 5.$$

You may use the fact that $2^n > 2n+1$ for all integers $n \geq 3$ in your proof.

[ 30 marks ]

(c) Suppose $f : \square \to \square$ is defined by

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = m - n \text{ for all integers } m \text{ and } n \text{ with } n \neq 0.$$

Is $f$ a well-defined function? Provide some justification to your answer.

[ 10 marks ]

(d) Suppose $f$ is a function from $X$ to $Y$. Give the definition for $f$ to be one-to-one.

[ 10 marks ]

***Soalan 5***

*(a) Buktikan yang berikut dengan menggunakan aruhan matematik:*

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

*bagi semua integer n* ≥ 1.

*[ 50 markah ]*

*(b) Buktikan yang berikut dengan menggunakan aruhan matematik:*

$$2^n > n^2 \text{ bagi semua integer } n \geq 5.$$

*Anda boleh menggunakan fakta bahawa* $2^n > 2n+1$ bagi semua $n \geq 3$ *dalam bukti anda.*

*[30 markah]*

*(c)* *Andaikan* $f:\square \to \square$ *ditakrifkan oleh*

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = m - n \text{ bagi semua integer } m \text{ and } n \text{ dengan } n \neq 0.$$

*Adakah* $f$ *ialah fungsi tertakrif baik? Berikan justifikasi kepada jawapan anda.*

*[ 10 markah ]*

*(d)* *Andaikan* $f$ *ialah fungsi dari* $X$ *ke* $Y$*. Berikan takrif untuk* $f$ *menjadi satu dengan satu.*

*[ 10 markah ]*

**Question 6**

(a) Let $A$ and $B$ be the following sets:

$$A = \left\{ m \in \square \;\middle|\; m = a^2 + a(a+4) + 2 \text{ for some integer } a \right\},$$
$$B = \left\{ n \in \square \;\middle|\; n = 2b^2 \text{ for some integer } b \right\}.$$

Prove that $A \subseteq B$.

[ 25 marks ]

(b) Suppose $A, B,$ and $C$ are arbitrary sets. Prove that

$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

[ 35 marks ]

(c) Disprove that for all sets $A, B,$ and $C$, $A \cup (B - C) = (A \cup B) - C$ .

[ 15 marks ]

(d) Suppose $f: X \to Y$ is an onto function. Prove that then $B \subseteq f[f^{-1}[B]]$ for all sets $B \subseteq Y$.

[ 25 marks ]

***Soalan 6***

*(a)* *Biarkan $A$ dan $B$ ialah set berikut:*

$$A = \left\{ m \in \mathbb{Z} \;\middle|\; m = a^2 + a(a+4) + 2 \text{ bagi suatu integer } a \right\},$$
$$B = \left\{ n \in \mathbb{Z} \;\middle|\; n = 2b^2 \text{ bagi suatu integer } b \right\}.$$

*Buktikan bahawa $A \subseteq B$.*

*[ 30 markah ]*

*(b)* *Andaikan $A, B,$ dan $C$ ialah sebarangan set. Buktikan bahawa*

$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

*[ 30 markah ]*

*(c)* *Sangkal bahawa bagi semua set $A, B$ dan $C$, $A \cup (B - C) = (A \cup B) - C$ .*

*[ 15 markah ]*

*(d)* *Andaikan $f : X \to Y$ ialah satu fungsi keseluruh. Buktikan bahawa maka $B \subseteq f[f^{-1}[B]]$ bagi semua set $B \subseteq Y$.*

*[ 25 markah ]*

**-ooo00ooo-**