UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 2007/2008

Jun 2008

MSS 211 – Modern Algebra
[Aljabar Moden]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions : Answer **all eight** [8] questions.

*[**Arahan** : Jawab **semua lapan** [8] soalan.]*

1. State De Morgan's Theorem. Hence, given the sets A, B and C, prove or disprove the following statements:

   (a) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$,

   (b) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cup C)$.

[10 marks]

2. (i) Define "onto functions".

   (ii) Given that $f : A \to B$ and $g : B \to C$ are functions such that $f \circ g$ is onto, show that g is onto.

   (iii) Given the functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ where $(x)f = \dfrac{3-x}{x^2+4}$ and $(x)g = \sqrt{x^2+1}$, define $f \circ g$. Hence, determine which of f, g and $f \circ g$ are onto.

[12 marks]

3. Consider the binary system $\langle S, * \rangle$ in the Cayley table below:

$*$	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	b	d	e	c
b	b	c	e	d	a
c	c	d	a	b	e
d	d	e	c	a	b

   (a) State the definition of a group and hence determine whether $\langle S, * \rangle$ is a group.

   (b) State Lagrange's Theorem and its corollary on the order of elements. Without using the result in (a), use this corollary to determine whether $\langle S, * \rangle$ is a group. Discuss also the possible value(s) of the order of the element a.

[15 marks]

1. *Nyatakan Teorem De Morgan. Dengan demikian, diberikan set* A, B *dan* C, *buktikan atau sangkalkan pernyataan berikut:*

   (a) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$,

   (b) $A\cup(B-C)=(A\cup B)-(A\cup C)$.

[10 markah]

2. *(i) Takrifkan "fungsi keseluruh".*

   (ii) Diberikan $f:A\to B$ *dan* $g:B\to C$ *merupakan fungsi-fungsi supaya* $f\circ g$ *fungsi keseluruh, tunjukkan bahawa* g *keseluruh.*

   (iii) Diberikan fungsi-fungsi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *dan* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *dengan* $(x)f=\dfrac{3-x}{x^2+4}$ *dan* $(x)g=\sqrt{x^2+1}$, *takrifkan* $f\circ g$. *Dengan demikian, tentukan yang manakah di antara* f, g *dan* $f\circ g$ *merupakan fungsi keseluruh.*

[12 markah]

3. *Pertimbangkan sistem dedua* $\langle S,*\rangle$ *yang dipaparkan oleh sifir Cayley berikut:*

*	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	b	d	e	c
b	b	c	e	d	a
c	c	d	a	b	e
d	d	e	c	a	b

   (a) Nyatakan takrif bagi kumpulan dan dengan itu tentukan sama ada $\langle S,*\rangle$ *merupakan suatu kumpulan.*

   (b) Nyatakan Teorem Lagrange serta korolarinya berkenaan peringkat unsur. Tanpa menggunakan keputusan di (a), gunakan korolari ini untuk menentukan sama ada $\langle S,*\rangle$ *merupakan suatu kumpulan. Bincangkan juga nilai(-nilai) yang mungkin untuk peringkat unsur a.*

[15 markah]

4. Suppose $\langle S,*\rangle$ is a binary system which contains two left identity elements. Show that it is not possible for $\langle S,*\rangle$ to contain a right identity element.

[12 marks]

5. (i) List all the elements of D_4, the symmetries of a square with edges 1, 2, 3 and 4, and obtain the order of each element.

   (ii) Hence, obtain all the subgroups of D_4, classifying each as normal or not.

   (iii) Obtain the Cayley table for the factor group D_4/H for every non-trivial, proper normal subgroup H in D_4.

[15 marks]

6. Write the definition of a *permutation on a set*. Given that $\langle G,*\rangle$ is a group, g is a fixed element of G, and the function $\lambda_g : G \rightarrow G$ where $(x)\lambda_g = x*g$ for all $x \in G$, show that λ_g is a permutation on G.

   (a) For the case $\langle G,*\rangle = \langle S_3,\circ\rangle$, find $\lambda_{(1\ 2\ 3)}$ and $\lambda_{(1\ 3)}$.

   (b) Show that for the general case, $\lambda_g \circ \lambda_h = \lambda_{g*h}$ for any fixed elements $g,h \in G$.

[12 marks]

7. Show that, up to isomorphism, there exist only two groups of order 4.

[12 marks]

8. State the definition of a ring. Hence, given $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a+b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$, prove that $\langle \mathbb{Z}[\sqrt{2}],+,\times\rangle$ is a ring. Discuss whether $\langle \mathbb{Z}[\sqrt{2}],+,\times\rangle$ is a commutative ring.

[12 marks]

4. *Katakan* $\langle S,*\rangle$ *merupakan suatu sistem dedua yang mempunyai dua unsur identiti kiri. Tunjukkan bahawa* $\langle S,*\rangle$ *tidak mengandungi unsur identiti kanan.*

[12 markah]

5. (i) *Senaraikan semua unsur bagi* D_4, *kumpulan simetri segi empat sisi sama dengan bucu-bucu 1, 2, 3 dan 4, dan peringkat bagi setiap unsurnya.*

   (ii) *Dengan demikian, dapatkan semua subkumpulan bagi* D_4, *seterusnya klasifikasikan setiapnya sebagai subkumpulan normal atau tidak.*

   (iii) *Dapatkan sifir Cayley bagi* D_4/H *untuk setiap subkumpulan normal* H *yang wajar dan tak remeh dalam* D_4.

[15 markah]

6. *Tuliskan takrif bagi pilihatur atas suatu set. Diberikan* $\langle G,*\rangle$ *suatu kumpulan,* g *unsur tetap dalam* G, *dan fungsi* $\lambda_g : G \to G$ *sebagai* $(x)\lambda_g = x * g$ *bagi semua* $x \in G$, *tunjukkan bahawa* λ_g *merupakan suatu pilihatur atas* G.

   (a) *Bagi kes* $\langle G,*\rangle = \langle S_3,\circ\rangle$, *cari* $\lambda_{(1\ 2\ 3)}$ *dan* $\lambda_{(1\ 3)}$.

   (b) *Tunjukkan bahawa secara am,* $\lambda_g \circ \lambda_h = \lambda_{g*h}$ *bagi sebarang unsur tetap* $g, h \in G$.

[12 markah]

7. *Tunjukkan bahawa, setakat isomorfisma, wujud hanya dua kumpulan berperingkat 4.*

[12 markah]

8. *Nyatakan takrif gelanggang. Dengan itu, diberikan* $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$, *buktikan bahawa* $\left\langle \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right], +, \times \right\rangle$ *merupakan suatu gelanggang. Bincangkan sama ada* $\left\langle \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right], +, \times \right\rangle$ *suatu gelanggang kalis tukar tertib.*

[12 markah]

-ooo O ooo-