
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 2007/2008

Jun 2008

MAA 111 – Algebra for Science Students
[Aljabar untuk Pelajar Sains]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions : Answer **all fifteen** [15] questions.

Arahan : Jawab **semua lima belas** [15] soalan.]

1. Consider the augmented matrix $C = (A|\mathbf{b})$ of a given linear nonhomogeneous system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Suppose $G = (M|\mathbf{d})$ is the reduced row echelon form of C .
- What will you see in G if the system is inconsistent?
 - What will you see in G if the system has exactly one solution?
 - What will you see in G if the system has infinitely many solutions?

[6 marks]

2. If a matrix A is in row-echelon form, then write which vectors form a basis for the row space of A , and which vectors form a basis for the column space of A .

[4 marks]

3. Suppose $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ are orthonormal vectors in \mathbb{R}^4 . Compute the length of the vector $\mathbf{v} = 2\mathbf{x}_1 - 3\mathbf{x}_2 - 2\mathbf{x}_3$.

[2 marks]

4. Describe the method to convert an arbitrary basis $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ of an inner product space \mathbb{R}^n into an orthonormal basis.

[6 marks]

5. Write what it means for a vector \mathbf{u} to be called a least squares solution of a linear system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ of m equations in n variables. Then describe how to solve a least squares problem. When would you get a unique least square solution?

[7 marks]

6. What is the null space of a 5×4 matrix with linearly independent columns?
What is the null space of a 4×5 matrix with linearly independent columns?

[4 marks]

7. Find *three* different ways of writing $(3, -4, 7) \in \mathbb{R}^3$ as a linear combination of $\mathbf{x}_1 = (-1, 0, 1)$, $\mathbf{x}_2 = (1, -1, 0)$, $\mathbf{x}_3 = (0, 1, -1)$, and $\mathbf{x}_4 = (1, 1, 1)$.

[8 marks]

8. If $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{pmatrix} = 3$, compute $\det(2C^{-1})$ where $C = \begin{pmatrix} 2p & -a+u & 3u \\ 2q & -b+v & 3v \\ 2r & -c+w & 3w \end{pmatrix}$.

[4 marks]

1. Pertimbangkan matriks imbuhan $C = (A|\mathbf{b})$ bagi suatu sistem tak homogen linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Andaikan $G = (M|\mathbf{d})$ adalah bentuk eselon baris terturun bagi C .
- Apa yang dapat anda perhatikan dalam G jika sistem yang diberi adalah tak konsisten?
 - Apa yang dapat anda perhatikan dalam G jika sistem yang diberi mempunyai penyelesaian unik?
 - Apa yang dapat anda perhatikan dalam G jika sistem yang diberi mempunyai penyelesaian tak terhingga banyak?

[6 markah]

2. Andaikan suatu matriks A sudah dalam bentuk eselon baris. Berikan vector-vector yang membentuk suatu asas bagi ruang baris A , dan juga vector-vector yang membentuk suatu asas bagi ruang lajur A .

[4 markah]

3. Andaikan $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ adalah vektor-vektor ortonormal dalam \mathbb{R}^4 . Carikan panjang bagi vektor $\mathbf{v} = 2\mathbf{x}_1 - 3\mathbf{x}_2 - 2\mathbf{x}_3$.

[2 markah]

4. Huraikan cara untuk menukarkan suatu asas sembarangan $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ bagi ruang hasil darab terkedalaman \mathbb{R}^n menjadi suatu asas ortonormal.

[6 markah]

5. Berikan apa maksudnya kita katakan suatu vektor \mathbf{u} ialah penyelesaian kuasa dua terkecil bagi sistem linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ yang mempunyai m persamaan dan n pembolehubah. Huraikan juga bagaimana menyelesaikan suatu masalah kuasa dua terkecil. Akhirnya sekali nyatakan bila kita akan dapat suatu penyelesaian kuasa dua terkecil yang unik?

[7 markah]

6. Apa itu ruang nol bagi matriks 5×4 yang mempunyai lajur tak bersandar linear? Apa itu ruang nol bagi matriks 4×5 yang mempunyai lajur tak bersandar linear?

[4 markah]

7. Berikan tiga cara berlainan untuk menuliskan $(3, -4, 7) \in \mathbb{R}^n$ sebagai suatu gabungan linear bagi $\mathbf{x}_1 = (-1, 0, 1)$, $\mathbf{x}_2 = (1, -1, 0)$, $\mathbf{x}_3 = (0, 1, -1)$, dan $\mathbf{x}_4 = (1, 1, 1)$.

[8 markah]

8. Diberi $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{pmatrix} = 3$ dan $C = \begin{pmatrix} 2p & -a + u & 3u \\ 2q & -b + v & 3v \\ 2r & -c + w & 3w \end{pmatrix}$. Kirakan $\det(2C^{-1})$.

[4 markah]

...4/-

9. If A is an $n \times n$ matrix and the homogeneous system $A^T \mathbf{x} = \mathbf{0}$ has a unique solution, what can you say about the dimension of the row space and the column space of A ?

[2 marks]

10. Consider the augmented matrix of a linear system $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & h & 2 \\ 2 & 4 & k \end{array}\right)$.

- (a) Find h and k such that the system has one solution
 (b) Find h and k such that the system is inconsistent
 (c) Find h and k such that the system has infinitely many solutions

[9 marks]

11. If $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ is a linear transformation such that $T\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ and $T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Find a formula for $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

[8 marks]

12. Let U be a subspace of \mathbb{R}^3 spanned by $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Find the dimension of U .

[5 marks]

13. Let U be the subspace of \mathbb{R}^4 spanned by $\mathbf{u}_1 = (2, 0, 1, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (3, 2, 0, 1)$ and $\mathbf{u}_3 = (1, 0, 4, 0)$. Find the projection of $\mathbf{w} = (-1, 5, 3, 1)$ onto U .

[15 marks]

14. Find the quadratic polynomial that best fits the given points/data in the sense of least squares.

x	-3	-1	0	1	3
y	3	1	1	2	4

[10 marks]

15. Suppose h_k and r_k denote the number of hares and rabbits respectively in the year k . Assume that the number of those hares and rabbits changes over the years according to the following rule :

$$\begin{aligned} r_{k+1} &= 10r_k - 3h_k \\ h_{k+1} &= 4r_k - 2h_k \end{aligned}$$

If there are 2 hares and 100 rabbits initially, what is the number of hares and rabbits in 2 years? in 20 years?

[10 marks]

...5/-

9. Jika A ialah suatu matriks $n \times n$ dan sistem homogen $A^T \mathbf{x} = \mathbf{0}$ mempunyai penyelesaian unik, apa yang boleh anda simpul tentang dimensi ruang baris dan ruang lajur bagi A ?

[2 markah]

10. Pertimbangkan matriks imbuhan bagi sistem linear $\begin{pmatrix} 1 & h & | & 2 \\ 2 & 4 & | & k \end{pmatrix}$.

- (a) Carikan h dan k sedemikian hingga sistem ini mempunyai penyelesaian unik.
 (b) Carikan h dan k sedemikian hingga sistem ini tak konsisten
 (c) Carikan h dan k sedemikian hingga sistem ini mempunyai penyelesaian tak terhingga banyak

[9 markah]

11. Jika $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ialah suatu transformasi linear sedemikian hingga $T \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Cari suatu rumus bagi $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

[8 markah]

12. Biar U suatu subruang bagi \mathbb{R}^3 yang direntang oleh $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
 Carikan dimensi bagi U .

[5 markah]

13. Biar U suatu subruang bagi \mathbb{R}^4 yang direntang oleh $\mathbf{u}_1 = (2,0,1,-1)$, $\mathbf{u}_2 = (3,2,0,1)$ and $\mathbf{u}_3 = (1,0,4,0)$. Cari unjuran bagi $\mathbf{w} = (-1,5,3,1)$ ke dalam U .

[15 markah]

14. Cari suatu polinomial kuadratik yang paling bersepadanan dengan data/titik yang diberi dari sudut kuasa dua terkecil.

x	-3	-1	0	1	3
y	3	1	1	2	4

[10 markah]

15. Andaikan h_k dan r_k menandakan bilangan kelinci dan arnab masing-masing pada tahun ke- k . Katakan bilangan kelinci dan arnab akan berubah dari setahun ke setahun mengikut peraturan seperti berikut:

$$\begin{aligned} r_{k+1} &= 10r_k - 3h_k \\ h_{k+1} &= 4r_k - 2h_k \end{aligned}$$

Jika pada mulanya ada 2 kelinci dan 100 arnab, berapa bilangan kelinci dan arnab akan diperolehi pada tahun ke-2? Pada tahun ke-20?

[10 markah]