
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
Academic Session 2007/2008

April 2008

MSS 318 – Discrete Mathematics
[Matematik Diskret]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer all fourteen [14] questions.

Arahan: Jawab semua empat belas [14] soalan.]

1. How many different functions are there from a set with four elements to a set with five elements? How many of these functions are one-one?
[2 marks]
2. Using the Pigeonhole principle, show that, if any eight integers are selected from the set $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$, there are at least two among these whose sum is fifteen.
[2 marks]
3. Find n if $P(n, 4) = 12 P(n, 2)$ where $P(n, r)$ is the number of r -permutations of n elements.
[2 marks]
4. If a department contains six men and five women how many ways are there to form a committee with six members if the committee must have the same number of men and women?
[2 marks]
5. In how many ways can all the symbols in the set $\{a, b, c, d, e, e, e, e, e\}$ be arranged in a line so that no e is adjacent to another e ?
[2 marks]
6. How many vertices are there for a graph with 10 edges, two vertices of degree 4 and all others of degree 3?
[2 marks]
7. Draw the undirected graph represented by the following adjacency matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[2 marks]

8. Does there exist a simple graph with vertex degrees 0, 1, 2, 3, 4, 5? Justify your answer.
[2 marks]
9. Find the chromatic number of each of the following graphs where n ($n \geq 3$) is the number of vertices: (i) the complete graph K_n (ii) the cycle C_n .
[2 marks]

1. Berapakah bilangan fungsi berlainan yang wujud dari suatu set dengan empat unsur kepada suatu set dengan lima unsur? Berapakah daripada fungsi ini yang merupakan satu-satu?
[2 markah]
2. Menggunakan prinsip 'Pigeonhole', tunjukkan bahawa, di antara sebarang lapan integer dari set $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$, terdapat sekurang-kurangnya dua daripada mereka yang hasil tambah mereka adalah lima belas.
[2 markah]
3. Cari n jika $P(n, 4) = 12 P(n, 2)$ di mana $P(n, r)$ merupakan bilangan r -permutasi atas n unsur.
[2 markah]
4. Sekiranya suatu jabatan mempunyai enam orang lelaki dan lima orang wanita, berapakah bilangan cara membentuk suatu jawatankuasa dengan enam orang ahli yang mengandungi bilangan sama lelaki dan wanita?
[2 markah]
5. Berapakah bilangan cara semua simbol dalam set $\{a, b, c, d, e, e, e, e, e\}$ diatitkan dalam satu baris supaya tiada e yang berkedudukan sebelah satu lagi e ?
[2 markah]
6. Berapakah bilangan verteks bagi suatu graf dengan 10 sisi, dua verteks berdarjah 4 dan yang lain berdarjah 3?
[2 markah]
7. Lukiskan suatu graf tak berarah untuk mewakili matriks adjasensi berikut:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[2 markah]

8. Wujudkan suatu graf simpel dengan verteks berdarjah 0, 1, 2, 3, 4, 5? Berikan alasan untuk jawapan anda.
[2 markah]
9. Cari bilangan kromatik bagi setiap graf berikut jika n ($n \geq 3$) merupakan bilangan verteks bagi: (i) graf lengkap K_n (ii) kitar C_n .
[2 markah]

10. Given $V = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$, determine the values of v, b, r, k, λ for the balanced incomplete block (v, b, r, k, λ) - design given by the following blocks:

124	134	156	236	346
126	135	235	245	456

[2 marks]

11. (a) Write down the formula for r -combinations from a set with n elements when repetitions are allowed. Using this determine the number of solutions to the equation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21$ where x_i , are non-negative integers for $i = 1, \dots, 5$.
- (b) In how many ways can seven people be arranged around a circular table, if arrangements are considered the same when one arrangement can be obtained from the other by rotation of the table? If two of the people insist on sitting next to each other how many arrangements are possible?
- (c) How many bit strings of length 10 contain i) exactly four 1s ii) an equal number of 0s and 1s?

[20 marks]

12. (a) Solve the following recurrence relation together with the initial conditions:
 $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0, n \geq 2, a_0 = 6, a_1 = 8.$

- (b) Find all solutions of the following recurrence relation with the given initial condition:

$$a_n = 2a_{n-1} + 3^n, a_0 = 1.$$

- (c) Using generating functions solve the recurrence relation with the initial condition:

$$a_n = 2a_{n-1}, a_0 = 5.$$

[20 marks]

13. (a) State a necessary and sufficient condition for a connected graph to have an Euler circuit. Using this find the values of n such that the complete graph K_n has an Euler circuit.

- (b) If a bipartite graph has a Hamiltonian circuit, show that it has only an even number of vertices.

- (c) If G is a tree with n vertices and m edges, show that $m = n - 1$.

[20 marks]

14. (a) Show that an undirected graph has an even number of odd vertices.

- (b) If a connected planar graph has six vertices each of degree 4, find the number of regions into which the plane is divided by a planar representation of this graph.

- (c) Show that $vr = bk$ for any (v, b, r, k, λ) -design.

[20 marks]

10. Diberikan $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, tentukan bilangan v, b, r, k, λ bagi blok tak lengkap seimbang bagi rekabentuk- (v, b, r, k, λ) yang diberi oleh blok berikut:

124	134	156	236	346
126	135	235	245	456

[2 markah]

11. (a) Tuliskan rumus untuk r -kombinasi dari suatu set dengan n unsur sekiranya ulangan dibenarkan. Gunakannya untuk menentukan bilangan penyelesaian kepada persamaan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21$ di mana x_i merupakan integer tak negatif untuk $i = 1, \dots, 5$.
- (b) Berapakah bilangan cara untuk menyusun tujuh orang mengelilingi suatu meja bulat, sekiranya satu susunan yang boleh diperolehi dari satu susunan yang lain melalui putaran dikira sebagai aturan yang sama? Sekiranya dua daripada mereka harus duduk bersebelahan satu sama lain, berapakah bilangan susunan yang mungkin?
- (c) Berapakah bilangan rangkai bit panjang 10 yang mengandungi i) tepat sebilangan empat nombor 1 ii) bilangan nombor 0 dan 1 yang sama?

[20 markah]

12. (a) Selesaikan hubungan rekurens berikut berserta syarat awal:

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0, \quad n \geq 2, \quad a_0 = 6, \quad a_1 = 8.$$

- (b) Cari semua penyelesaian bagi hubungan rekurens berikut berserta syarat awal:

$$a_n = 2a_{n-1} + 3^n, \quad a_0 = 1.$$

- (c) Gunakan fungsi penjana untuk menyelesaikan hubungan rekurens dengan syarat awal berikut:

$$a_n = 2a_{n-1}, \quad a_0 = 5.$$

[20 markah]

13. (a) Nyatakan syarat perlu dan cukup untuk suatu graf berkait mempunyai litar Euler. Dengan itu, cari nilai bagi n supaya graf lengkap K_n mempunyai litar Euler.
- (b) Jika suatu graf dwibahagian mempunyai suatu litar Hamiltonian, tunjukkan bahawa ia hanya mempunyai sebilangan genap verteks.
- (c) Jika G suatu pokok dengan sebilangan n verteks dan m sisi, tunjukkan bahawa $m = n - 1$.

[20 markah]

14. (a) Tunjukkan bahawa suatu graf tak berarah mempunyai sebilangan genap verteks.
- (b) Jika suatu graf planar berkait mempunyai enam verteks setiapnya berdarjah 4, cari bilangan kawasan yang satah ini dibahagikan oleh suatu perwakilan bersatah bagi graf ini.
- (c) Tunjukkan bahawa $vr = bk$ untuk sebarang rekabentuk- (v, b, r, k, λ) .

[20 markah]