
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
Academic Session 2007/2008

April 2008

MSS 211 – Modern Algebra
[Aljabar Moden]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions : Answer **all nine** [9] questions.

Arahan : Jawab **semua sembilan** [9] soalan.]

1. Given $\xi = \{x \in \mathbb{Z} \mid -12 \leq x \leq 12\}$, $A = \{\text{primes}\}$, $B = \{\text{odd integers}\}$ and $C = \{x \mid x^3 - x = 0\}$, obtain the following sets:

- (a) $A \cap B$
 (b) $A - B$
 (c) $A \cup B \cup C$

[6 marks]

2. Prove or disprove the following statement:

“If A, B and C are sets, then $A \cap B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq C$ or $B \subseteq C$ ”.

[8 marks]

3. (i) Given that $f: A \rightarrow B$ and $g: B \rightarrow C$ are functions such that $f \circ g$ is bijective, show that f is one-to-one and g is onto.

- (ii) Given the functions $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ and $g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ where $(x)f = \frac{x-3}{x^2+1}$ and

$(x)g = \sqrt{x^2+3}$, define $f \circ g$. Hence, determine which of f , g and $f \circ g$ are one-to-one and which are onto. If any of these functions is bijective, find its inverse.

[12 marks]

4. Consider the binary system $\langle S, * \rangle$ in the Cayley table below:

$*$	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	e	d	b	c
b	b	c	e	d	a
c	c	d	a	e	b
d	d	b	c	a	e

State the definition for each of the binary system below and hence classify whether $\langle S, * \rangle$ is a

- (i) quasigroup,
 (ii) loop, or
 (iii) group.

[12 marks]

1. Diberikan $\xi = \{x \in \mathbb{Z} \mid -12 \leq x \leq 12\}$, $A = \{\text{nombor perdana}\}$,
 $B = \{\text{integer ganjil}\}$ dan $C = \{x \mid x^3 - x = 0\}$, dapatkan set berikut:
- $A \cap B$
 - $A - B$
 - $A \cup B \cup C$
- [6 markah]
2. Buktikan atau sangkalkan pernyataan berikut:
 "Jika A , B dan C merupakan set, maka
 $A \cap B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq C \text{ or } B \subseteq C$ ".
- [8 markah]
3. (i) Diberikan $f: A \rightarrow B$ dan $g: B \rightarrow C$ merupakan fungsi-fungsi supaya $f \circ g$ fungsi bijektif, tunjukkan bahawa f satu-ke-satu dan g keseluruhan.
- (ii) Diberikan fungsi-fungsi $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ dan $g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $(x)f = \frac{x-3}{x^2+1}$ dan $(x)g = \sqrt{x^2+3}$, takrifkan $f \circ g$. Dengan demikian, tentukan yang manakah di antara f , g dan $f \circ g$ merupakan satu-ke-satu dan yang manakah merupakan keseluruhan. Sekiranya sebarang dari fungsi-fungsi ini bijektif, cari songsangannya.
- [12 markah]
4. Pertimbangkan sistem dedua $\langle S, * \rangle$ yang dipaparkan oleh sifir Cayley berikut:

*	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	e	d	b	c
b	b	c	e	d	a
c	c	d	a	e	b
d	d	b	c	a	e

Nyatakan takrif bagi setiap sistem dedua yang berikut dan dengan itu tentukan sama ada $\langle S, * \rangle$ merupakan suatu

- kuasikumpulan,
- lup, atau
- kumpulan.

[12 markah]

5. Suppose $\langle S, * \rangle$ is a binary system which contains both a left identity element e_L and a right identity element e_R . Obtain the relationship between e_L and e_R . Is it possible for $\langle S, * \rangle$ to contain another left or right identity element?

[10 marks]

6. (i) State Lagrange's Theorem and its corollary on the order of elements.
 (ii) List all the elements of A_4 and obtain the order of each element.
 (iii) Hence, obtain all the subgroups of A_4 , classifying each as normal or not.

[15 marks]

7. Write the definition of a *permutation on a set*. Given that $\langle G, * \rangle$ is a group, g is a fixed element of G , and the function $\lambda_g : G \rightarrow G$ which is defined as $(x)\lambda_g = x * g$ for all $x \in G$, show that λ_g is a permutation on G .

(a) For the case $\langle G, * \rangle = \langle S_3, \circ \rangle$, find $\lambda_{(1\ 2\ 3)}$ and $\lambda_{(1\ 3)}$.

(b) Show that for the general case, $\lambda_g \circ \lambda_h = \lambda_{g * h}$ for any fixed elements $g, h \in G$.

[12 marks]

8. Show that, up to isomorphism, there exist only two groups of order 6. Obtain a quotient group of order two in each case.

[15 marks]

9. State the definition of a ring. Hence, given the definition of the operations \oplus and \otimes on \mathbb{R} as

$$x \oplus y = x + y - 1 \text{ and } x \otimes y = x + y - xy,$$

prove that $\langle \mathbb{R}, \oplus, \otimes \rangle$ is a ring. Determine whether $\langle \mathbb{R}, \oplus, \otimes \rangle$ is a commutative ring and if there exists a unity element in it.

[10 marks]

5. Katakan $\langle S, * \rangle$ merupakan suatu sistem dedua yang mempunyai suatu unsur identiti kiri e_L serta unsur identiti kanan e_R . Dapatkan hubungan antara e_L dan e_R . Mungkinkah $\langle S, * \rangle$ mengandungi satu lagi unsur identiti kiri atau kanan?

[10 markah]

6. (i) Nyatakan Teorem Lagrange serta korolarinya berkenaan peringkat unsur.
 (ii) Senaraikan semua unsur bagi A_4 dan dapatkan peringkat bagi setiap unsur tersebut.
 (iii) Dengan demikian, dapatkan semua subkumpulan bagi A_4 , seterusnya klasifikasikan setiapnya sebagai subkumpulan normal atau tidak.

[15 markah]

7. Tuliskan takrif bagi pilihatur atas suatu set. Diberikan $\langle G, * \rangle$ suatu kumpulan, g suatu unsur tetap dalam G , dan fungsi $\lambda_g: G \rightarrow G$ yang tertakrif sebagai $(x)\lambda_g = x * g$ bagi semua $x \in G$, tunjukkan bahawa λ_g merupakan suatu pilihatur atas G .

(a) Bagi kes $\langle G, * \rangle = \langle S_3, \circ \rangle$, cari $\lambda_{(1\ 2\ 3)}$ dan $\lambda_{(1\ 3)}$.

(b) Tunjukkan bahawa secara am, $\lambda_g \circ \lambda_h = \lambda_{g * h}$ bagi sebarang unsur tetap $g, h \in G$.

[12 markah]

8. Tunjukkan bahawa, sehingga isomorfisma, wujud hanya dua kumpulan berperingkat 6. Dapatkan suatu kumpulan hasil bahagi berperingkat dua dalam setiap kes.

[15 markah]

9. Nyatakan takrif gelanggang. Dengan itu, diberikan takrif bagi operasi \oplus dan \otimes atas \mathbb{R} sebagai

$$x \oplus y = x + y - 1 \text{ dan } x \otimes y = x + y - xy,$$

buktikan bahawa $\langle \mathbb{R}, \oplus, \otimes \rangle$ merupakan suatu gelanggang. Tentukan sama ada $\langle \mathbb{R}, \oplus, \otimes \rangle$ suatu gelanggang kalis tukar tertib serta kewujudan unsur uniti di dalamnya.

[10 markah]