
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
Academic Session 2007/2008

April 2008

MGM 551 – Operations Research
[Penyelidikan Operasi]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of ELEVEN pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi SEBELAS muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all eight** [8] questions.

Arahan: Jawab **semua lapan** [8] soalan.]

1. (a) Standardize the following linear programming formulation:

$$\text{Maximize } Z = 15x_1 + 10x_2 - 6x_3 + 8x_4$$

$$\begin{aligned} \text{Subject to } 7x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 &= 35 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 6x_4 &\geq -25 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 &\leq 40 \end{aligned}$$

where $x_1 \geq 0$, x_2 unrestricted, $-4 \leq x_3 \leq 6$, $x_4 \geq 0$.

- (b) Show the dual formulation of the primal linear programming in (a)

[10 marks]

2. (a) Find the saddle point of the matrix game given below:

3	-5	-6	5
-4	-5	-10	-3
5	6	-9	-10
6	2	-10	4

- (b) Find the probability of the strategy and the corresponding value of the game below:

10	-3
8	9

[10 marks]

3. Given the activities, precedence activities and duration in days of a project,

Activities	Precedence Activities	Duration (days)
A	-	5
B	-	7
C	-	3
D	A	4
E	A	3
F	A	4
G	B	3
H	C	5
I	D	7
J	D,E	5
K	F,G,H	3
L	J,K	5

- (i) Draw the arrow diagram and show the free float (FF) and the total float (TF) times on the diagram.

1. (a) Piawaikan model pengaturcaraan linear berikut:

$$\text{Maksimumkan} \quad Z = 15x_1 + 10x_2 - 6x_3 + 8x_4$$

$$\begin{array}{rcll} \text{Terhadap} & 7x_1 & + & 2x_2 - 5x_3 & & - & 3x_4 & = & 35 \\ & 5x_1 & - & 3x_2 & & + & x_3 & - & 6x_4 & \geq & -25 \\ & 2x_1 & - & 3x_2 & & + & 4x_3 & + & 2x_4 & \leq & 40 \end{array}$$

$$\text{Dengan } x_1 \geq 0, \quad x_2 \text{ tak tersekat}, \quad -4 \leq x_3 \leq 6, \quad x_4 \geq 0.$$

- (b) Tunjukkan perumusan dual bagi pengaturcaraan linear primal di (a).

[10 markah]

2. (a) Dapatkan titik pelana bagi permainan matrix berikut.

3	-5	-6	5
-4	-5	-10	-3
5	6	-9	-10
6	2	-10	4

- (b) Dapatkan kebarangkalian strategi dan nilai permainan berikut:

10	-3
8	9

[10 markah]

3. Diberikan kegiatan, kegiatan pendahulu dan jangkamasa dalam hari suatu projek.

Kegiatan	Kegiatan pendahulu	Jangkamasa (hari)
A	-	5
B	-	7
C	-	3
D	A	4
E	A	3
F	A	4
G	B	3
H	C	5
I	D	7
J	D,E	5
K	F,G,H	3
L	J,K	5

- (i) Lakarkan gambarajah anak panah dan tunjukkan masa apungan bebas (FF) dan jumlah apungan (TF) di situ.

- (ii) Determine the critical path of the project and the shortest possible time of its completion. List down the critical activities.
- (iii) Draw the Gantt chart for this project.

[15 marks]

4. A company assembles four products (1, 2, 3, 4) from delivered components. The profit per unit for each product (1, 2, 3, 4) is RM100, RM150, RM 220 and RM 170 respectively. The maximum demand in the next week for each product (1, 2, 3, 4) is 50, 60, 85 and 70 units respectively.

There are three stages (A, B, C) in the manual assembly of each product and the man-hours needed for each stage per unit of product are shown below:

Stage	Product			
	1	2	3	4
A	2	2	1	1
B	2	4	1	2
C	3	6	1	5

The nominal time available in the next week for assembly at each stage (A, B, C) is 160, 200 and 80 man-hours respectively. It is possible to vary the man-hours spent on assembly at each stage such that workers previously employed on stage B assembly could spend up to 20% of their time on stage A assembly and workers previously employed on stage C assembly could spend up to 30% of their time on stage A assembly.

Production constraints also require that the ratio (product 1 units assembled)/(product 4 units assembled) must lie between 0.9 and 1.15.

Formulate the problem of deciding how much to produce next week as a linear program.

[10 marks]

5. Show two iterations only towards solving the following LP problem,.

$$\text{Minimize } Z = 5x_1 + 3x_3$$

$$\text{Subject to } \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &\geq 5 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 &\geq 8 \end{aligned}$$

$$\text{where } x_i \geq 0 \quad \forall i.$$

[10 marks]

- (i) Tentukan lintasan genting projek ini dan masa terpendek menyiapkannya. Senaraikan kegiatan genting tersebut
- (ii) Lakarkan carta Gantt untuk projek ini.

[15 markah]

4. Sebuah syarikat memasang empat produk (1, 2, 3, 4,) daripada komponen yang dibekal. Keuntungan seunit produk (1, 2, 3, 4) masing-masing ialah RM100, RM150, RM 220 and RM 170. Permintaan maksimum bagi minggu hadapan bagi setiap produk (1, 2, 3, 4) masing-masing ialah 50, 60, 85 and 70 unit. Terdapat tiga tahap (A, B, C) pemasangan secara manual bagi setiap produk dan jumlah masa tenaga kerja diperlukan bagi setiap tahap ditunjukkan seperti berikut:

Stage	Product			
	1	2	3	4
A	2	2	1	1
B	2	4	1	2
C	3	6	1	5

Jumlah masa pemasangan yang telah ditentukan untuk minggu hadapan bagi setiap tahap (A, B, C) masing-masing ialah 160, 200 dan 80 jam-orang.

Perubahan masa pemasangan jam-orang di setiap tahap dibenarkan supaya pekerja yang telah ditugaskan di tahap pemasangan B sebelumnya dibenarkan bekerja sehingga 20% masa mereka di tahap pemasangan A, dan pekerja yang telah ditugaskan di tahap pemasangan C sebelumnya dibenarkan bekerja sehingga 30% masa mereka di tahap pemasangan A.

Kekangan pemasangan juga memerlukan bahawa nisbah (bilangan unit pengeluaran produk 1) / bilangan unit pengeluaran produk 4) mesti berada di antara 0.9 dan 1.15.

Rumuskan masalah untuk menentukan pengeluaran minggu hadapan ini sebagai suatu rumus pengaturcaraan linear.

[10 markah]

5. Tunjukkan dua lelaran sahaja ke arah menyelesaikan masalah PL berikut,.

$$\text{Minimumkan } Z = 5x_1 + 3x_3$$

$$\text{Terhadap } 2x_1 + x_2 - 4x_3 \geq 10$$

$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 \geq 12$$

$$\text{dengan } x_i \geq 0 \quad \forall i.$$

[10 markah]

6. A factory produces four products, requiring time on two machines and two types (skilled and unskilled) of labour. The amount of machine time and labour (in hours) used by each product and the sales prices are given in the table below.

Product	Machine 1	Machine 2	Skilled	Unskilled	Sales(RM)
1	11	4	8	7	300
2	7	6	5	8	260
3	6	5	4	7	220
4	5	4	6	4	180

Each month, 700 hours are available on machine 1 and 500 hours on machine 2. Each month the factory can purchase 600 hours of skilled labour at RM8 per hour and up to 650 hours of unskilled labour at RM6 per hour. The variables are as follows:

Let x_i be the amount of product i produced each month, where $i = 1, 2, 3, 4$

The linear programming formulation of the problem is,

$$\begin{aligned} \text{Maximize } Z &= 300x_1 + 260x_2 + 220x_3 + 180x_4 - 8[8x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 6x_4] \\ &\quad - 6[7x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 4x_4] \\ &= [300 - 106]x_1 + [260 - 88]x_2 + [220 - 74]x_3 + [180 - 72]x_4 \end{aligned}$$

i.e. Maximize $Z = 194x_1 + 172x_2 + 146x_3 + 108x_4$
Subject to

$$\begin{aligned} 11x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 &\leq 700 \\ 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 &\leq 500 \\ 8x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 6x_4 &\leq 600 \\ 7x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 4x_4 &\leq 650 \end{aligned}$$

where $x_i \geq 0$ for all i .

After adding all the necessary slack variables, the optimal simplex tableau is given below:

BFS	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	s_4	Solution
Z	0	0	1.63	0	10.52	6.22	0	7.63	15,433.33
x_1	1	0	0.04	0	0.15	-0.22	0	0.04	16.67
x_4	0	0	-0.20	1	0.19	0.72	0	-0.70	33.33
s_3	0	0	0.20	0	-1.19	-1.72	1	1.70	16.67
x_2	0	1	0.94	0	-0.22	-0.17	0	0.44	50

Answer the following questions, each time referring to the optimal tableau above:

6. Sebuah kilang menghasilkan 4 produk, memerlukan masa daripada dua mesin dan daripada dua jenis tenaga kerja (mahir dan tidak mahir). Amaun masa mesin dan tenaga (dalam jam) diperlukan bagi setiap produk dan harga jualannya di berikan di dalam jadual berikut:

Produk	Mesin 1	Mesin 2	Mahir	Tidak Mahir	Harga(RM)
1	11	4	8	7	300
2	7	6	5	8	260
3	6	5	4	7	220
4	5	4	6	4	180

Setiap bulan 700 jam boleh didapati daripada mesin 1 dan 500 jam daripada mesin 2. Setiap bulan kilang ini boleh menggaji sehingga 600 jam tenaga mahir dengan gaji RM8 sejam dan sehingga 650 jam tenaga tidak mahir dengan gaji RM6 sejam. Pembolehubah masalah ini adalah seperti berikut:

Biarkan x_i sebagai bilangan setiap produk i yang dihasilkan setiap bulan, dengan $i = 1, 2, 3, 4$.

Rumus pengaturcaraan linear masalah ini ialah,

$$\begin{aligned} \text{Maksimumkan } Z &= 300x_1 + 260x_2 + 220x_3 + 180x_4 - 8[8x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 6x_4] \\ &\quad - 6[7x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 4x_4] \\ &= [300 - 106]x_1 + [260 - 88]x_2 + [220 - 74]x_3 + [180 - 72]x_4 \end{aligned}$$

iaitu Maksimumkan $Z = 194x_1 + 172x_2 + 146x_3 + 108x_4$
Terhadap

$$11x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 \leq 700$$

$$4x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 500$$

$$8x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 6x_4 \leq 600$$

$$7x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 4x_4 \leq 650$$

dengan $x_i \geq 0$ bagi semua i .

Setelah memasukkan pembolehubah lalai yang diperlukan, tablo simpleks optimum adalah seperti berikut:

ASAS	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	s_4	Penyelesaian
Z	0	0	1.63	0	10.52	6.22	0	7.63	15,433.33
x_1	1	0	0.04	0	0.15	-0.22	0	0.04	16.67
x_4	0	0	-0.20	1	0.19	0.72	0	-0.70	33.33
s_3	0	0	0.20	0	-1.19	-1.72	1	1.70	16.67
x_2	0	1	0.94	0	-0.22	-0.17	0	0.44	50

Jawab soalan berikut, setiap kali merujuk kepada tablo optimum di atas:

- (i) Which constraints are binding and which are not?
- (ii) Determine the scarce resources and give their shadow prices.
- (iii) What is the most that the factory is willing to pay for an extra hour of time on each machine?
- (iv) What is the most that the factory is willing to pay for an extra hour of time on each type of labour?
- (v) If product 1 is sold for RM 290, what would be the new optimum solution of the problem?
- (vi) If an extra 100 hours of skilled labour can be purchased each month, then what would be the new profit for the factory?

[15 marks]

7. You are given the following simplex tableau for a maximization problem.

Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Solution
Z	-c	3	0	0	0	36
?	-2	a_1	1	0	0	5
?	a_2	-3	0	1	0	9
?	a_3	4	0	0	1	b

Give conditions on the unknown a_1 , a_2 , a_3 , b and c that make the following statements true:

- (i) The current solution is optimal.
- (ii) The current solution is optimal, and there are alternative optimal solutions.
- (iii) The solution is unbounded (assume $b \geq 0$).
- (iv) What is the current basic feasible solution?

[15 marks]

- (i) Nyatakan kekangan mana yang terikat dan yang tidak terikat?
- (ii) Tentukan sumber berkurangan dan sumber berlebihan serta harga bayangannya.
- (iii) Berapakah nilai tertinggi kilang ini sanggup bayar untuk tambahan masa dalam jam bagi setiap jenis mesin?
- (iv) Berapakah nilai tertinggi kilang ini sanggup bayar untuk tambahan masa dalam jam bagi setiap jenis tenaga kerja?
- (v) Jika produk 1 dijual dengan harga RM 290, apakah penyelesaian optimum baru masalah ini?
- (vi) Jika tambahan 100 jam tenaga kerja mahir boleh didapati setiap bulan, maka berapakah keuntungan baru bagi kilang ini?

[15 markah]

7. Anda diberikan tablo simpleks optimum bagi masalah pemaksimuman berikut,

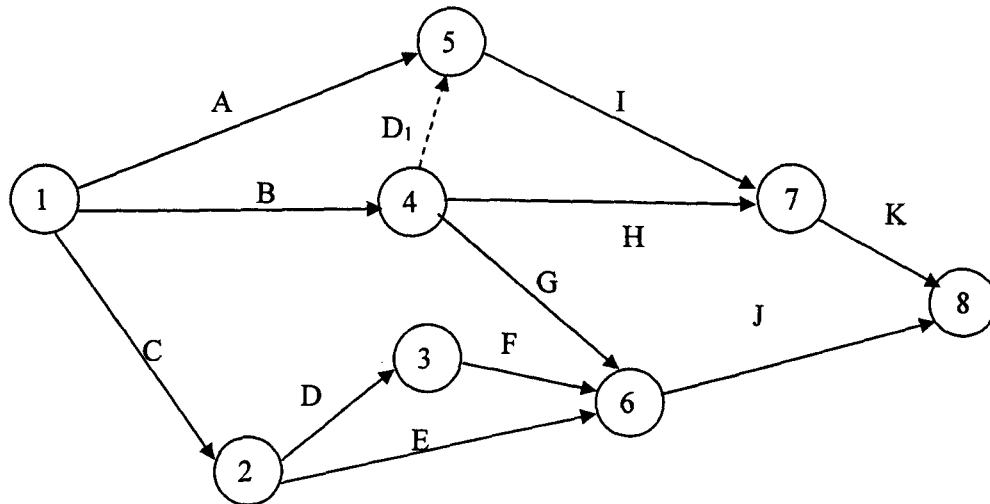
Asas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Penyelesaian
Z	-c	3	0	0	0	36
?	-2	a_1	1	0	0	5
?	a_2	-3	0	1	0	9
?	a_3	4	0	0	1	b

Berikan syarat bagi nilai pemalar a_1 , a_2 , a_3 , b and c supaya pernyataan berikut adalah benar:

- (i) Penyelesaian semasa adalah optimum.
- (ii) Penyelesaian semasa adalah optimum, tetapi wujud penyelesaian optimum alternatif.
- (iii) Penyelesaian adalah tidak terbatas (andaikan $b \geq 0$).
- (iv) Apakah penyelesaian asas tersaur semasa?

[15 markah]

8. The network diagram below represents a project.



The normal and crash duration, and the associated costs are given as follows:

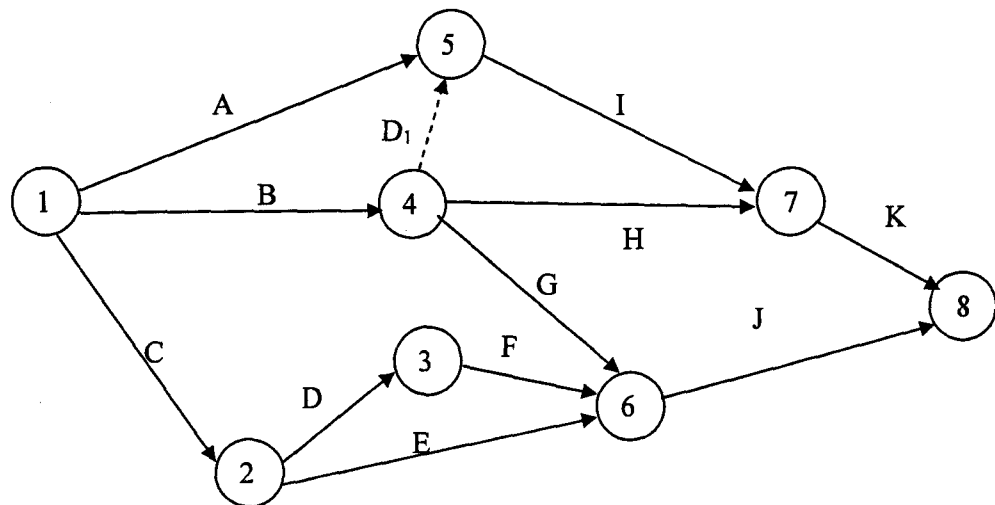
Activity	Duration (days)		Cost (RM)	
	Normal	Crash	Normal	Crash
A	5	3	20	80
B	4	3	70	100
C	3	3	150	150
D	5	3	180	300
E	4	2	200	400
F	4	3	180	220
G	3	2	120	200
H	2	1	100	200
I	6	4	400	600
J	7	5	250	350
K	8	6	400	550

The indirect cost per day is RM70. The contract agreement states that there is a penalty cost of RM120 per day if the project completed later than 18 days and there is a bonus of RM150 per day if it is earlier than 18 days.

- (i) Determine all possible critical paths.
- (ii) List all of the critical activities.
- (iii) Get the minimum total cost for the project.
- (iv) Perform **two** iterations to crash the project. Show the total cost for each iterations.

[15 marks]

8. Gambarajah rangkaian berikut mewakili suatu projek:



Jangkamasa biasa dan nahas, serta kos biasa dan nahas bagi setiap kegiatan diberikan seperti berikut:

Kegiatan	Jangkamasa (hari)		Kos Langsung (RM)	
	Biasa	Nahas	Biasa	Nahas
A	5	3	20	80
B	4	3	70	100
C	3	3	150	150
D	5	3	180	300
E	4	2	200	400
F	4	3	180	220
G	3	2	120	200
H	2	1	100	200
I	6	4	400	600
J	7	5	250	350
K	8	6	400	550

Kos tak langsung projek ialah RM70 sehari. Ternyata di dalam perjanjian kontrak bahawa denda sebanyak RM120 sehari dikenakan jika projek ini siap lewat daripada 18 hari dan ditawarkan bonus sebanyak RM150 sehari jika ia siap lebih awal daripada 18 hari.

- Tentukan semua lintasan genting yang mungkin.
- Senaraikan kesemua kegiatan genting.
- Dapatkan jumlah kos minimum projek ini.
- Lakukan hanya dua lelaran pemampatan bagi projek ini. Berikan jumlah kos projek bagi setiap lelaran.

[15 markah]