
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
Academic Session 2007/2008

April 2008

MAA 111 – Algebra for Science Students
[Aljabar untuk Pelajar Sains]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions : Answer **all twenty** [20] questions.

Arahan : Jawab **semua dua puluh** [20] soalan.]

1. If A is an $n \times n$ matrix and $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ has exactly one solution for every \mathbf{b} , what can you say about the matrix A ?
[2 marks]
2. Suppose the null space of a $m \times n$ matrix A contains only the zero vector. What can you say about solutions to $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$?
[2 marks]
3. What does it mean for a subset V of \mathbb{R}^n to be a subspace?
[2 marks]
4. What does it mean for a subset S of \mathbb{R}^n to be linearly independent?
[2 marks]
5. What is the meaning of basis and dimension of a subspace V of \mathbb{R}^n .
[2 marks]
6. If $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ then the vector \mathbf{b} is a linear combination of what vectors from the matrix A ? And so \mathbf{b} lies in which space of matrix A ?
[2 marks]
7. State the definitions of rank (A) and nullity (A) of a matrix A .
[2 marks]
8. If A is a matrix with n columns, write the most important formula which relates rank(A) and nullity (A).
[2 marks]
9. The least square solution to $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ minimizes what error function?
[2 marks]
10. What is the connection between the least square solution of $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ and the idea of projection onto the column space?
[2 marks]
11. State the definitions of an eigenvalue and an eigenvector of a matrix A .
[2 marks]
12. Write what it means by the statement that "a matrix can be diagonalized (or diagonalizable)"
[2 marks]
13. True/False :
 - (a) $\det(A + b) = \det A + \det B$ for any two $n \times n$ matrices A and B .
 - (b) The span of any set of n vectors is n –dimensional.
 - (c) If an $n \times n$ matrix A has n linearly independent eigenvectors then A is diagonalizable.[6 marks]

1. Jika A matriks $n \times n$ dan $Ax = b$ mempunyai tepat satu penyelesaian untuk setiap b , apa anda boleh katakana tentang matriks A ?
[2 markah]
2. Andaikan ruang nul untuk matriks A mempunyai hanya vektor sifar. Apa anda boleh katakan tentang penyelesaian $Ax = b$?
[2 markah]
3. Apakah maksud suatu subset V dalam \mathbb{R}^n adalah subruang?
[2 markah]
4. Apakah maksud suatu subset S dalam \mathbb{R}^n adalah bersandar linear?
[2 markah]
5. Apakah maksud asas dan dimensi suatu subruang V dalam \mathbb{R}^n .
[2 markah]
6. Jika $Ax = b$ maka vektor b adalah gabungan linear vector-vector apa dari matriks A ? Jadi b terletak di dalam ruang apa daripada matriks A .
[2 markah]
7. Nyatakan takrif untuk pangkat (A) dan nuliti (A) untuk suatu matriks A .
[2 markah]
8. Jika A ialah matriks dengan n lajur, tuliskan rumus penting yang mengaitkan pangkat (A) dengan nuliti (A) .
[2 markah]
9. Penyelesaiakan kuasadua terkecil untuk $Ax = b$ meminimumkan fungsi ralat apa?
[2 markah]
10. Apakah kaitan dia antara penyelesaian kuasadua terkecil untuk $Ax = b$ dengan idea unjuran ke atas ruang lajur?
[2 markah]
11. Nyatakan takrif untuk nilai eigen dan vektor eigen suatu matriks A .
[2 markah]
12. Tuliskan maksud pernyataan "suatu matriks boleh diperpenjurukan/terpenjurukan"
[2 markah]
13. Betul/Salah :
 (a) $\det(A + b) = \det A + \det B$ untuk sebarang dua matriks $n \times n$ A dan B .
 (b) rentang sebarang set untuk n vektor adalah n -dimensional.
 (c) Jika suatu matriks $n \times n$ A mempunyai n vektor eigen tak bersandar linear, maka A terpenjurukan.
 [6 markah]

14. For which values of k will the following linear system have no solutions? Exactly one solution? Infinitely many solutions?

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\x_3 &= 2 \\(k^2 - 4)x_3 &= k - 2\end{aligned}$$

[10 marks]

15. Let $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a linear transformation such that $T(1,1,1,1) = (5,1,-3)$ and $T(-1,1,0,2) = (2,0,1)$. Find $T(5,-1,2,-4)$.

[10 marks]

16. Find the rank and the nullity of $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

[10 marks]

17. Let $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 6 & -4 & -3 \end{pmatrix}$

- (a) Compute the eigenvalues and eigenvectors of A .
(b) Is the matrix A diagonalizable? If so, diagonalize A .

[10 marks]

18. Let $\mathbf{v}_1 = (1,1,1,-1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,0,1,2)$, $\mathbf{v}_3 = (-1,0,1,0)$, $\mathbf{v}_4 = (-1,3,-1,1)$. Expand the vector $\mathbf{x} = (1,2,3,4)$ as a linear combination of \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_3 , and \mathbf{v}_4 .

[10 marks]

19. Find the linear function which best fits the given data in the sense of least squares.

x	0	1	2	3	4	5
y	0	1	4	9	16	25

[10 marks]

20. Three industries A , B and C are such that all the output of A is used by B all the output of B is used by C , and all the output of C is used by A . Assuming that there is no product is exported or imported, find the equilibrium price structure.

[10 marks]

14. Apakah nilai k sedemikian system linear berikut tidak mempunyai penyelesaian? Tepat satu penyelesaian? Tak terhingga banyak penyelesaian?

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\x_3 &= 2 \\(k^2 - 4)x_3 &= k - 2\end{aligned}$$

[10 markah]

15. Andaikan $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ suatu transformasi linear sedemikian $T(1,1,1,1) = (5,1,-3)$ dan $T(-1,1,0,2) = (2,0,1)$. Cari $T(5,-1,2,-4)$.

[10 markah]

16. Cari pangkat dan nulliti untuk $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

[10 markah]

17. Andaikan $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 6 & -4 & -3 \end{pmatrix}$

- (a) Kira nilai eigen dan vektor eigen untuk A .
(b) Adakah matriks A terperpenjuran? Jika ya, perpenjuran A .

[10 markah]

18. Andaikan $\mathbf{v}_1 = (1,1,1,-1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,0,1,2)$, $\mathbf{v}_3 = (-1,0,1,0)$, $\mathbf{v}_4 = (-1,3,-1,1)$. Kembangkan vektor $\mathbf{x} = (1,2,3,4)$ sebagai suatu gabungan linear daripada \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_3 , dan \mathbf{v}_4 .

[10 markah]

19. Cari fungsi linear yang paling padan data berikut dari segi kuasdua terkecil.

x	0	1	2	3	4	5
y	0	1	4	9	16	25

[10 markah]

20. Tiga industri A, B dan C adalah sedemikian semua output A digunakan oleh B , semua output B digunakan oleh C , dan semua output C digunakan oleh A . Dengan andaian tiada barangan dieksport atau diimport, cari keseimbangan struktur harga.

[10 markah]