

---

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama  
Sidang Akademik 2004/2005  
*First Semester Examination  
2004/2005 Academic Session*

Oktober 2004  
*October 2004*

**ESA 201/3 – Proses Rawak Kejuruteraan**  
*Random Process In Engineering*

Masa : [ 3 jam]  
Hour : [3 hour]

---

**ARAHAN KEPADA CALON :**  
**INSTRUCTION TO CANDIDATES:**

Sila pastikan bahawa kertas soalan ini mengandungi **DUA BELAS (12)** mukasurat dan **TUJUH (7)** soalan sebelum anda memulakan peperiksaan.  
*Please ensure that this paper contains **TWELVE (12)** printed pages and **SEVEN (7)** questions before you begin examination.*

Jawab **LIMA (5)** soalan sahaja.  
*Answer **FIVE (5)** the questions only.*

Jawab semua soalan dalam Bahasa Melayu.  
*Answer all questions in Bahasa Melayu .*

Setiap soalan mestilah dimulakan pada mukasurat yang baru.  
*Each questions must begin from a new page.*

1. (a) Jika  $M$  dan  $N$  ialah dua pembolehubah rawak diskrit dan  $P(M=m, N=n)$  ialah fungsi ketumpatan kebarangkalian bercantum  $M$  dan  $N$ , takrifkan fungsi taburan marginal bagi  $M$  dan fungsi marginal bagi  $N$ . Berikan juga takrifan bagi fungsi kebarangkalian bersyarat  $N$  diberi  $M$ .

*If  $M$  and  $N$  are two discrete random variables and  $P(M=m, N=n)$  is a joint probability density function  $M$  and  $N$ , define the marginal distribution function of  $M$  and the marginal distribution function of  $N$ . Give also the definition of a conditional probability function of  $N$  given  $M$ .*

(5 markah/marks)

- (b) Katakan  $X$  ialah pembolehubah rawak bilangan gempa bumi yang berlaku dalam satu kawasan di Jawa Barat, Indonesia pada masa yang tertentu dan  $Y$  ialah pembolehubah rawak bilangan gempa bumi yang berlaku di satu kawasan lain di Indonesia pada masa waktu dan selang yang sama. Katakan anggaran fungsi kebarangkalian bercantum bagi bilangan gempa bumi di kedua-dua kawasan itu diberi sebagai:

$$P(X, Y) = \begin{cases} K(X + 2Y + 1) & , X = 0, 1 \quad , Y = 0, 1, 2 \\ 0 & , \text{lain - lain} \end{cases}$$

$K$  adalah sebarang nilai malar.

Tentukan,

- (i) nilai  $K$ ;
- (ii) taburan fungsi marginal  $X$  dan fungsi marginal  $Y$ ;
- (iii) min dan varians bagi  $X$  dan min dan varians bagi  $Y$ ;
- (iv) fungsi kebarangkalian bersyarat bagi  $X$  diberi  $Y = 1$ .

Let  $X$  be a number of earthquake occurs at a certain time in Jawa Barat, Indonesia and  $Y$  is a number of earthquake occurs at the same time in other places in Indonesia. The two random variables  $X$  and  $Y$  have a joint probability density function of the form,

$$P(X, Y) = \begin{cases} K(X + 2Y + 1) & , X = 0, 1, Y = 0, 1, 2 \\ 0 & , \text{lain - lain} \end{cases}$$

$K$  is any constant.

Determine,

- (i) the value of  $K$ ;
- (ii) the marginal function of  $X$  and the marginal function of  $Y$ ;
- (iii) the mean and the variance of  $X$  and the mean and the variance of  $Y$ ;
- (iv) the conditional probability function of  $X$  given  $Y = 1$ .

(15 markah/marks)

2. (a) Katakan  $X$  ialah pembolehubah rawak kedudukan kewangan sebuah syarikat penerbangan baru AirAero Sdn. Bhd. dan  $Y$  ialah pembolehubah rawak kekuatan staf dalam syarikat tersebut. Fungsi ketumpatan kebarangkalian bercantum bagi dua pembolehubah rawak itu diberi sebagai,

$$f(x, y) = \begin{cases} Axy & , 0 \leq x \leq 1 , 0 \leq y \leq x \\ 0 & , \text{lain - lain.} \end{cases}$$

$A$  adalah sebarang nilai malar.

Tentukan,

- (i) nilai  $A$  ;
- (ii) fungsi marginal bagi kedudukan kewangan dan fungsi marginal bagi kekuatan staf dalam syarikat itu. Nyatakan sama ada kedudukan kewangan dan kekuatan staf itu bersandar diantara satu sama lain atau tidak?.

*Let  $X$  be a financial situation and  $Y$  is a staff strength of AirAero Sdn. Bhd., one of the new aviation companies. The joint probability density function of  $X$  and  $Y$  is given by,*

$$f(x, y) = \begin{cases} Axy & , 0 \leq x \leq 1 , 0 \leq y \leq x \\ 0 & , \text{lain - lain.} \end{cases}$$

*$A$  is any constant.*

*Determine,*

- (i) *the value of  $A$  ;*
- (ii) *the marginal function of a financial situation and the marginal function of a staff strength of the company. Are the two variables depending each other or not?.*

**(5 markah/marks)**

- (b) Katakan  $P$  dan  $S$  ialah dua pembolehubah rawak yang menunjukkan tekanan dan kelajuan sebuah pesawat di udara pada suatu masa yang tertentu. Fungsi kebarangkalian bercantum bagi kedua-dua pembolehubah ini diberi sebagai,

$$f(p, s) = \begin{cases} A p^2 (1 - s) & , \quad 0 \leq p, s \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{lain - lain.} \end{cases}$$

$A$  adalah sebarang nilai malar.  
Tentukan,

- (i) nilai  $A$  ;
- (ii) fungsi marginal bagi tekanan dan fungsi marginal bagi kelajuan pesawat tersebut. Nyatakan sama ada kedua-dua pembolehubah rawak itu bebas atau tidak?.
- (iii) min dan varians bagi tekanan dan min dan varians bagi kelajuan pesawat;
- (iv) kebarangkalian tekanan melebihi 0.5psi dan kelajuan melebihi 0.5km/s;
- (v) kebarangkalian tekanan melebihi 0.5psi jika diberi kelajuan pesawat pada masa itu ialah 0.75km/s.

*Let  $P$  and  $S$  are two random variables that indicate the pressure and the velocity of an aircraft in the air at a certain time. The joint probability density function is given in the form,*

*$A$  is any constant.*

*Determine,*

$$f(p, s) = \begin{cases} A p^2 (1 - s) & , \quad 0 \leq p, s \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{lain - lain.} \end{cases}$$

*the value of  $A$  ;*

- (i) *the marginal function of a pressure and the marginal function of a velocity of the aircraft. Are the random variables independent or not?.*
- (ii) *the mean and the variance of pressure and the mean and the variance of velocity of the aircraft ;*
- (iii) *the probability that the pressure is more than 0.5psi and the velocity is also more than 0.5km/s;*
- (iv) *the probability that the pressure is more than 0.5psi given that the velocity of the aircraft at that time is 0.75km/s.*

**(15 markah/marks)**

3. (a) Katakan  $X(t)$  ialah satu proses rawak selanjur. Berikan dua syarat penting yang membolehkan proses rawak tersebut pegun secara meluas.

*Let  $X(t)$  is a continuous random process. Give two conditions that for a random process be a wide-sense stationary process.*

**(5 markah/marks)**

- (b) Katakan  $X(t) = A\cos(\omega t + \theta)$  ialah satu proses rawak dengan  $A$  dan  $\omega$  adalah malar dan  $\theta$  ialah pembolehubah rawak tertabur secara seragam dari  $0$  ke  $2\pi$ .

- (i) Tunjukkan sama ada  $X(t)$  itu adalah satu proses rawak pegun secara meluas atau tidak?;  
 (ii) Tentukan nilai min proses rawak kuasa-dua bagi proses tersebut;  
 (iii) Seterusnya, tentukan fungsi ketumpatan spektrum bagi proses rawak itu.

*Let  $X(t) = A\cos(\omega t + \theta)$  is a random process with  $A$  and  $\omega$  are constant and  $\theta$  is a random variable which is uniformly distributed between  $0$  and  $2\pi$ .*

- (i) *Is  $X(t)$  in the wide sense stationary process or not?;*  
 (ii) *Find the mean square value of the process;*  
 (iii) *Determine the spectral density of this process.*

**(15 markah/marks)**

4. (a) Jika  $X(t)$  adalah satu proses rawak pegun, nyatakan fungsi ketumpatan spektrum,  $S(f)$  bagi proses itu dan berikan dua sifat fungsi ketumpatan spektrum tersebut.

*If  $X(t)$  is a stationary random process, state the spectral density function,  $S(f)$  of the process and give two properties of the function.*

**(5 markah/marks)**

- (b) Katakan bagi satu proses rawak pegun dalam sistem telegraf mempunyai fungsi korelasi,  $R(\tau) = \exp(-|\tau|)$ . Dapatkan fungsi ketumpatan spektrum bagi proses rawak tersebut.

*Let the stationary random process in the telegraph system has a correlation function,  $R(\tau) = \exp(-|\tau|)$ . Find the spectral density of this random process.*

**(15 markah/marks)**

5. (a) Bagi satu sistem linear yang mempunyai *masukan*  $X(t)$ , *keluaran*  $Y(t)$  dan respons dedenyut  $h(t)$ , berikan perhubungan diantara *masukan* dan *keluaran* tersebut. Seterusnya nyatakan dua sifat dalam satu sistem linear.

*For a linear system with input  $X(t)$ , output  $Y(t)$  and impulse respons  $h(t)$ , what is the relationship between the input and the output of the system? Hence, state two properties of the linear system.*

**(5 markah/marks)**

- (b) Katakan dua proses rawak pegun di beri sebagai;

$$X(t) = 3\cos(\omega t + \theta); \text{ dan}$$

$$Y(t) = 2\cos(\omega t + \theta + \varphi)$$

dengan  $\varphi$  adalah malar dan  $\theta$  ialah pembolehubah rawak tertabur secara seragam dari  $0$  ke  $2\pi$ .

- (i) Tentukan fungsi korelasi silang diantara dua proses rawak tersebut;  
 (ii) Jika  $X(t)$  dan  $Y(t)$  adalah orthogonal, dapatkan nilai  $\varphi$ .

*Let the two stationary random process are given as,*

$$X(t) = 3\cos(\omega t + \theta); \text{ and}$$

$$Y(t) = 2\cos(\omega t + \theta + \varphi)$$

*with  $\varphi$  is a constant and  $\theta$  is a random variable uniformly distributed from  $0$  to  $2\pi$ .*

- (i) Find the cross correlation function of the two random processes;  
 (ii) For what values of  $\varphi$  are  $X(t)$  and  $Y(t)$  orthogonal?.

**(15 markah/marks)**



6. (a) Tentukan taburan keseimbangan bagi proses Markov dengan matriks peralihan seperti yang berikut,

$$P = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}$$

dengan  $0 < \alpha < 1$  dan  $0 < \beta < 1$ .

*Find the equilibrium distribution of the two state Markov process with transition matrix,*

$$P = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}$$

where  $0 < \alpha < 1$  and  $0 < \beta < 1$ .

**(5 markah/marks)**

- (b) Pergerakan dan kedudukan satelit TiungSat di orbit telah diperhatikan dan dikaji oleh sekumpulan penyelidik di Pusat Pengajian Kejuruteraan Aeroangkasa, USM. Pada satu masa tertentu kedudukan satelit adalah dalam keadaan,  $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ .

Jika pada masa  $t$ , satelit itu berada pada keadaan  $i \{i = -1, 0, 1\}$  maka pada masa  $t+1$ , satelit itu akan berada pada keadaan  $i-1$  atau  $i+1$  dengan kebarangkalian yang sama. Tetapi jika pada masa  $t$ , satelit itu berada pada keadaan  $i = -2$  atau  $i = 2$ , maka pada masa  $t+1$ , satelit itu akan berada pada keadaan  $-1, 0$ , atau  $1$  juga dengan kebarangkalian yang sama. Jika pergerakan satelit itu adalah mengikut proses Markov,

- (i) Tulis matriks peralihan bagi pergerakan satelit itu;
- (ii) Jika pada satu masa tertentu, satelit itu berada pada keadaan  $(0.3, 0.3, 0.0, 0.2, 0.2)$ , apakah kebarangkalian satelit TiungSat itu akan berada pada keadaan  $0$  pada masa  $t = 3$ ?
- (iii) Tentukan taburan keseimbangan pergerakan satelit itu di orbit.

The movement of the TiungSat satellite in orbit has been observed by a group of researcher from the School of Aerospace Engineering, USM. At a certain time, the satellite is at  $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ .

If at time  $t$ , the satellite is at  $i \in \{-1, 0, 1\}$ , so at time  $t+1$ , the satellite will be at  $i - 1$  or  $i + 1$  with the same probability. But if at time  $t$ , the satellite is at  $i = -2$  or  $i = 2$ , so at time  $t+1$ , the satellite will be at  $-1, 0$  or  $1$  also with the same probability. If the movement of the satellite is a Markov process,

- (i) Write down the transition matrix for the movement of the satellite;
- (ii) If at a certain time, the satellite is at  $(0.3, 0.3, 0.0, 0.2, 0.2)$ , what is the probability that the Tiungsat satellite will be at  $0$  at  $t = 3$ ?
- (iii) Find the equilibrium distribution of the movement of the satellite.

(15 markah/marks)

7. (a) Katakan  $P_{ij}$  ialah matriks peralihan yang menyatakan kebarangkalian peralihan dari keadaan  $i$  ke keadaan  $j$  dalam satu langkah. Berikan dua sifat bagi matriks peralihan tersebut.

*Let  $P_{ij}$  is a transition matrix in term of transition probability from state  $i$  to state  $j$  in one step. Give two characteristics of the transition matrix.*

**(5 markah/marks)**

- (b) Dalam sistem komunikasi sebuah pesawat, isyarat penghantaran dan penerimaan mesej adalah mengikut proses Markov dengan matriks peralihan,

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} r & w & s \end{matrix} \\ \begin{matrix} r \\ w \\ s \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.50 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.05 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.50 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Katakan  $r$  menunjukkan mesej diterima dari stesen bumi,  $s$  menunjukkan mesej dihantar ke stesen bumi dan  $w$  menunjukkan isyarat sedang menunggu mesej dari stesen bumi.

- (i) Jika pada satu masa tertentu, sistem komunikasi itu berada pada kedudukan  $(0.4, 0.3, 0.3)$ , apakah kebarangkalian sistem itu berada pada keadaan mesej dihantar ke stesen bumi selepas masa,  $t = 3$  ? ;
- (ii) Tentukan taburan keseimbangan bagi proses sistem komunikasi tersebut.

Suppose that a communication system in one of the aircraft is a Markov process with the following transition matrix,

$$P = \begin{array}{c} r \\ w \\ s \end{array} \begin{array}{ccc} r & w & s \\ \left[ \begin{array}{ccc} 0.50 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.05 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.50 \end{array} \right] \end{array}$$

Let  $r$  denote the receive message from the ground station,  $s$  denote the sending of message to ground station, and  $w$  denote the waiting for the message from the ground station.

- (i) If at a certain time, a communication system is in the position  $(0.4, 0.3, 0.3)$ , what is the probability that after the third step,  $t = 3$ , a communication is in state sending of message to the ground station;
- (ii) Find the equilibrium distribution of a communication system.

(15 markah/marks)