

**PENGGUNAAN PERSAMAAN PEMBEZAAN
SEPARA UNTUK MENJANA REKA BENTUK
PERMUKAAN**

SHAHRUL NIZAM BIN ISHAK

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

2010

**PENGGUNAAN PERSAMAAN PEMBEZAAN
SEPARA UNTUK MENJANA REKA BENTUK
PERMUKAAN**

oleh

SHAHRUL NIZAM BIN ISHAK

**Tesis yang diserahkan untuk
memenuhi keperluan bagi
Ijazah Sarjana Sains**

JUN 2010

PENGHARGAAN

Alhamdulillah, segala puji bagi Allah tuhan sekalian 'alam. Selawat dan salam ke atas junjungan besar Nabi Muhammad s.a.w. serta para sahabatnya r.a.

Sekalung budi dinukilkan kepada bonda (Zainab Mohd Noor) dan ayahanda (Ishak Long) yang sentiasa mendorong, menyokong dan menyemai kasih sayang agar penyelidikan ini dapat diselesaikan dengan jayanya.

Sebaik-baik kebaikan dirakamkan dan dihulurkan kepada penyelia utama, Dr. Hj. Jamaludin Md. Ali, atas bimbingan dan tunjuk ajar beliau. Setinggi-tinggi penghargaan diucapkan kepada Profesor Dr. Hassan Ugail (Bradford University, UK) dan Profesor Madya Dr. Hj. Ahmad Abdul Majid yang banyak menyokong sepanjang penyelidikan ini dijalankan.

Iringan terima kasih juga diberikan kepada Dekan, staf sokongan Pusat Pengajian Sains Matematik USM, Dr Gobithaasan Rudrusamy, Zainor Ridzuan Yahya dan Yeoh Weng Kang.

Penyelidikan ini telah disokong oleh Pusat Pengajian Sains Matematik di bawah geran universiti penyelidikan (RU) no. akaun 1001/PMATHS/817023, geran penyelidikan jangkamasa pendek no. akaun 304/PMATHS/637057 dan skim Fellowship USM.

Akhir kalam, keampunan dipohon daripada Yang Maha Esa agar memberkati ilmu yang telah dikurniakan kepada hamba dan menggolongkan usaha mereka sebagai amal soleh serta merahmati sekalian manusia.

JADUAL KANDUNGAN

PENGHARGAAN	ii
JADUAL KANDUNGAN	iii
SENARAI JADUAL	vi
SENARAI RAJAH	vii
ABSTRAK	ix
ABSTRACT	x
1 PENGENALAN	1
1.1 Masalah Kajian	3
1.2 Objektif Kajian	4
1.3 Sorotan Kajian	4
1.3.1 Kronologi Penjanaan Reka bentuk Permukaan PPS	4
1.4 Sumbangan Kajian	7
1.5 Susunan Tesis	8
2 PERSAMAAN PEMBEZAAN SEPARA	10
2.1 Pendahuluan	10
2.2 Definisi PPS	11
2.3 Pengelasan PPS	11
2.4 Penyelesaian PPS	14
2.4.1 Teori Asas Pemisahan Pembolehubah	18

2.4.2	Kaedah Pemisahan Pembolehubah	20
2.5	Siri Fourier	24
2.5.1	Fungsi Berkala	25
2.5.2	Identiti Trigonometri dan Rumus Kamiran	26
2.5.3	Pengiraan Pekali Siri Fourier	28
3	PENJANAAN REKA BENTUK PERMUKAAN PPS PERINGKAT KE-DUA, KEEMPAT DAN KEENAM	32
3.1	Pengenalan	32
3.2	Formulasi Matematik untuk Permukaan PPS	34
3.3	Penjanaan Permukaan PPS Peringkat Kedua	35
3.4	Penjanaan Permukaan PPS Peringkat Keempat	39
3.5	Penjanaan Permukaan PPS Peringkat Keenam	46
4	PENGGUNAAN PPS UNTUK MENJANA PERMUKAAN BERPARAMETER	51
4.1	Pengenalan	51
4.2	Gambaran Permukaan Berparameter	53
4.2.1	Koordinat Lengkung Linear Pada Suatu Permukaan	55
4.2.2	Vektor Koordinat Pada Suatu Permukaan	55
4.2.3	Satah Tangen dan Vektor Normal	56
4.3	Penggunaan PPS bagi Menjana Permukaan Berparameter	57
4.4	Penyelesaian Secara Analitikal terhadap PPS	59
4.5	Contoh Permukaan PPS - Pasu Berlekuk	60
4.5.1	Kesan Perubahan Permukaan Kawalan	63
4.5.2	Kesan Perubahan Parameter Reka bentuk Khas	64
4.6	Perbandingan Kecekapan	66
5	PENGGUNAAN PPS UNTUK MENJANA PERMUKAAN REKA BENTUK BEBAS DAN PENGAWALAN RANGKA	68
5.1	Pengenalan	69

5.2	Penjanaan Permukaan Reka bentuk Bebas Menggunakan PPS	70
5.2.1	Contoh Reka bentuk Pasu	73
5.2.2	Contoh Reka bentuk Badan Perahu Layar	74
5.3	Permukaan PPS dengan Kawalan Rangka	76
6	KESIMPULAN	81
6.1	Kajian Lanjutan	83
	RUJUKAN	84
	LAMPIRAN	88
	PENERBITAN DAN PEMBENTANGAN	91

SENARAI JADUAL

2.1	Hubungan antara dua jenis pengelasan PPS	14
-----	--	----

SENARAI RAJAH

2.1	Persamaan Laplace dalam segiempat	15
2.2	Penyelesaian asasi $s_n(u, v) = A_n e^{-(n\lambda\alpha)^2 v} \sin(n\lambda u)$	23
3.1	Janaan reka bentuk tembikar menggunakan PPS peringkat kedua	39
3.2	Kesan perubahan nilai parameter reka bentuk khas, a	40
3.3	Janaan reka bentuk pasu berkelopak bunga menggunakan PPS peringkat keempat	44
3.4	Kesan perubahan kedutan pada permukaan pasu berkelopak bunga	45
3.5	Janaan permukaan gelas bagi PPS peringkat keenam	49
3.6	Janaan permukaan simetri terdiri daripada satu tampalan sahaja	50
4.1	Koordinat lengkung linear pada suatu permukaan	55
4.2	Satah tangen	57
4.3	Ilustrasi kedudukan syarat sempadan posisi dan syarat terbitan	59
4.4	Penjanaan permukaan berparameter - pasu berlekuk	62
4.5	Arah penghampiran pada permukaan utama	63
4.6	Kesan perubahan pada nilai n_1 iaitu (a) $n_1 = 1$, (b) $n_1 = 2$, (c) $n_1 = 3$, (d) $n_1 = 5$, (e) $n_1 = 7$, (f) $n_1 = 10$	65
4.7	Kesan perubahan parameter reka bentuk khas a terhadap permukaan berparameter dengan perubahan nilai (a) $a = 1$, (b) $a = 6$ dan (c) $a = 9$	66
4.8	Perbandingan Kecekapan bagi Janaan Pasu Berlekuk	67
5.1	Kesan syarat sempadan terbitan terhadap permukaan PPS	72
5.2	Reka bentuk pasu PPS	74
5.3	Famili reka bentuk pasu PPS	74

5.4	Reka bentuk badan perahu layar PPS	76
5.5	Gambaran pandangan tiga matra. [1]	77
5.6	Reka bentuk permukaan silinder	77
5.7	Gambaran rangka, $A_0(u)$ dan vektor jejari, \mathbf{r}_v	78
5.8	Ilustrasi bentuk pasu berkelopak bunga yang melengkung	79
5.9	Manipulasi bentuk dalam Rajah 5.8 menggunakan kawalan rangka	79
5.10	Reka bentuk tanduk bagi permukaan PPS	80

**PENGGUNAAN PERSAMAAN PEMBEZAAN SEPARA UNTUK MENJANA
REKA BENTUK PERMUKAAN
ABSTRAK**

Persamaan pembezaan separa (PPS) telah meluas digunakan dalam bidang komputer grafik, reka bentuk berbantu komputer (RBK) dan reka bentuk geometri berbantu komputer (RGBK) untuk aplikasi pemodelan geometri seperti reka bentuk permukaan, penjanaan semula reka bentuk dan animasi. Jadi, untuk menggunakan sepenuhnya kelebihan yang terdapat pada PPS tersebut, tesis ini mengemukakan pendekatan inovatif bagi penjanaan reka bentuk permukaan menggunakan persamaan pembezaan separa. Secara matematik, penjanaan permukaan dilihat sebagai masalah nilai sempadan yang mana maklumat digunakan untuk menentukan suatu reka bentuk permukaan yang ditakrifkan disepanjang hujung lengkungnya. Pereka menentukan reka bentuk permukaan dan kaedah PPS yang akan menghasilkan janaan permukaan tersebut. Gambaran matematik yang digunakan untuk menjana setiap permukaan adalah berasaskan penyelesaian terhadap PPS tersebut. Maka, kajian telah menghasilkan reka bentuk permukaan dengan menggunakan PPS peringkat kedua, keempat dan keenam. Formulasi PPS tersebut dinyatakan dalam versi yang telah diubahsuai. Kemudian, penjanaan permukaan berparameter menggunakan penyelesaian secara analitis terhadap PPS dikaji. Pengenalan kepada syarat sempadan dengan kehadiran fungsi sinus dibincangkan. Beberapa kesan perubahan parameter ditunjukkan melalui contoh ilustrasi tersebut. Seterusnya, penjanaan permukaan reka bentuk bebas menggunakan PPS diselidiki dan beberapa contoh hasil janaan ditunjukkan. Akhirnya, penjanaan permukaan dengan kawalan rangka didemonstrasikan berserta dengan kepentingan penggunaannya juga diterangkan.

**APPLICATION OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR GENERATING
SURFACE DESIGN
ABSTRACT**

Partial differential equations (PDEs) are widely used in computer graphics, computer aided design (CAD) and computer aided geometric design (CAGD) fields for geometric modeling applications such as geometric design, shape reconstruction and animation. Hence, to make full use of the advantage of PDEs, this thesis introduces an innovative approach for generating surface design using PDE. Mathematically, surface generation is viewed as a boundary value problem in which information used to specify the shape of a surface is defined along its edges. The designer specifies the shape of the surface, and the PDE method produces the surface design. The mathematical representation used to generate each surface is the solution of a partial differential equation. Thus, our attempt is to produce a surface design using second, fourth and sixth order PDE. The PDE formulation is stated in modified version. Then, our attempt is to generate parametric surface based on the PDE solution analytically was conducted. Introduction of boundary condition with sinus function was discussed. Few effect of the parameter changes is presented via the given illustration of examples. Furthermore, our attempt is to generate free-form surface design using PDE as studied and some examples of the generated result was showed. Finally, our attempt is to demonstrate the generating surface design using spine control and the important of using the spine control for design a surface is also been highlighted.

BAB 1

PENGENALAN

Persamaan pembezaan separa, secara ringkas ditulis sebagai PPS dapat digunakan untuk menerangkan ciri-ciri fizikal suatu objek dan fenomena-fenomena yang berlaku di alam nyata menerusi sifat-sifat pembezaannya. Kini, PPS telah berkembang luas tahap penggunaannya dalam pelbagai aplikasi pengkomputeran visual seperti simulasi, visualasi dan pemprosesan imej. Sebaliknya, teknik pemodelan geometri adalah asas kepada banyak cabang pengkomputeran visual seperti komputer grafik, reka bentuk berbantu komputer (RBK), reka bentuk geometri berbantu komputer (RGBK) dan animasi. Kajian lepas menunjukkan terdapat beberapa jenis PPS tertentu yang memberi ruang alternatif untuk memodelkan suatu objek geometri. Walau bagaimanapun, potensi pemodelan geometri PPS tersebut belum diadaptasikan sepenuhnya lagi.

Secara amnya, teknik pemodelan yang digunakan untuk menghasilkan suatu objek geometri boleh dinyatakan dalam bentuk model tak tersirat ataupun model berparameter. Model tak tersirat menggambarkan suatu objek yang dibentuk melalui penetapan titik-titik koordinatnya dan menyatakan dengan jelas hubungan antara titik dan objek tersebut. Model berparameter pula menakrifkan objek geometri melalui penjanaan yang menghubungkan antara domain parameter dan ruang fizikal misalnya splin bentuk bebas [2, 3, 4] dan teknik PPS berparameter [5, 6, 7, 8, 9]. Model berparameter adalah antara contoh model tak tersirat yang popular. Berdasarkan sorotan kajian, terdapat juga pel-

bagai kaedah lain yang boleh digunakan untuk penjanaan suatu permukaan iaitu seperti menggunakan teknik polinomial. Antara contoh teknik polinomial yang diadaptasi bagi menjana permukaan adalah seperti permukaan Bézier [10], Splin-B [11], nisbah splin-B [1] dan NURBS (Non Uniform Rational B-Splin) [12, 13]. Apabila teknik polinomial tersebut digunakan, permukaan tampalan yang dihasilkan biasanya dijana menggunakan set titik kawalan dan juga manipulasi terhadapnya akan menyebabkan berlakunya beberapa perubahan reka bentuk. Satu masalah yang dihadapi di sini adalah titik-titik kawalan tersebut terlalu banyak sehingga menyebabkan sukar untuk dikawal [2, 14]. Maka, kaedah PPS diperkenalkan dan diaplikasikan.

Namun demikian, kaedah PPS ini menawarkan beberapa alternatif dalam penjanaan suatu reka bentuk permukaan secara model tak tersirat dan model berparameter. Penakrifan dan pengawalan objek geometri atau permukaan tersebut adalah melalui persamaan pembezaan separa tertentu dengan mengenakan syarat sempadan yang sesuai. Kaedah PPS ini mempunyai beberapa kelebihan:

- berperihal gerak hati iaitu pengguna tidak perlu kepada pengetahuan matematik yang mendalam untuk memanipulasi suatu reka bentuk tersebut dengan mengambil kira syarat sempadannya adalah tersirat dalam penyelesaiannya
- sesuai, mudah dan fleksibel terhadap penjanaan dan pengawalan suatu reka bentuk permukaan contohnya penjanaan reka bentuk pasu, gelas dan badan perahu layar melalui perkongsian ciri-ciri asas yang sama
- boleh digunakan sebagai satu alat pemodelan geometri dengan parameter antara PPS dan syarat sempadannya bertindak sebagai parameter reka bentuk kawalan
- kebolehpayaan menggunakan satu permukaan tampalan sahaja bagi menjana permukaan dengan menggunakan set parameter yang minimum

Jadi, perkara pertama seorang pereka harus beri perhatian sebelum menjana suatu reka bentuk objek adalah:

- (i) menentukan bentuk lengkung yang disempadani oleh permukaan tersebut dalam suatu ruang

dan kemudian

- (ii) 'menjelmakan' permukaan tersebut dengan mengenakan syarat sempadan tertentu

Didapati bahawa secara asasnya kaedah PPS ini berbeza berbanding pendekatan konvensional yang digunakan untuk menjana reka bentuk permukaan berdasarkan pendekatan nilai sempadan, yang mana permukaan tersebut ditentukan melalui data yang terdapat di sepanjang hujung lengkung berbanding dengan permukaan silang yang dinyatakan dalam bentuk kawalan jaringan. Ini bermakna, dari segi jumlah parameter yang diperlukan untuk menentukan suatu janaan permukaan, masalah dimensi telah dapat dikurangkan daripada dua kepada satu.

Walau bagaimanapun, isu utama yang harus diberi penekanan apabila menjana permukaan PPS adalah syarat sempadannya yang menakrif bentuk garis lengkung yang disempadani oleh objek tersebut.

1.1 Masalah Kajian

Biasanya perkara yang diminati oleh seseorang pereka adalah boleh menjana suatu permukaan dengan senang melalui grafik komputer dan permukaan tersebut mudah dikawal. Kaedah konvensional yang menggunakan tampalan polinomial seperti splin-B atau NURBS adalah berkehendak kepada titik kawalan yang banyak bagi suatu penjanaan reka bentuk permukaan. Maka, masalah utama dalam mereka bentuk suatu permukaan dengan komputer adalah faktor ketiadaan suatu kaedah yang membolehkannya ditakrif dalam keadaan yang mudah dan mengikut perihal gerak hati agar dapat diaplikasikan.

1.2 Objektif Kajian

Fokus utama kajian ini adalah menentukan bagaimana penggunaan kaedah PPS diaplikasikan terhadap masalah penjanaan reka bentuk permukaan di mana permukaan yang dihasilkan adalah dengan mencari penyelesaian yang sesuai untuk peringkat PPS eliptik tertentu yang memenuhi syarat sempadan tertentu.

1.3 Sorotan Kajian

Di sini penerangan mengenai sorotan kajian berkaitan dengan penjanaan reka bentuk permukaan menggunakan kaedah PPS diuraikan.

1.3.1 Kronologi Penjanaan Reka bentuk Permukaan PPS

Pada tahun 1989, dua orang professor dari Universiti Leeds iaitu Bloor dan Wilson [5, 6] telah merintis satu penemuan baru bagi menghasilkan permukaan yang licin berdasarkan penyelesaian PPS berbentuk eliptik. Pada dasarnya, kaedah PPS yang diperkenalkan tersebut adalah bagi masalah nilai sempadan yang menggunakan PPS berbentuk eliptik dengan kebanyakan sifat yang tertakrif pada suatu permukaan itu adalah berpunca daripada sempadan lengkung tersebut. Hal ini membolehkan permukaan yang licin dapat dijana dan dikawal dengan bilangan parameter yang sedikit sahaja seperti syarat sempadan dan pekali reka bentuk khas yang bergabung dengan PPS berbentuk eliptik. (1.6) dikenali sebagai PPS berbentuk eliptik peringkat keempat yang telah diperkenalkan dalam [6] sebagai permukaan PPS:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + a^2 \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right)^2 \mathbf{S}(u, v) = 0, \quad (1.1)$$

dengan u, v adalah koordinat berparameter pada ruang dua dimensi, a ialah pekali adunan yang mengawal sifat permukaan PPS disepanjang arah parameter tersebut dan

$$\mathbf{S}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad (1.2)$$

menakrif koordinat permukaan PPS dalam tiga-matra ($3D$).

(1.1) adalah berasaskan persamaan *Bi-Harmonik*, $\nabla^4\phi = 0$. Salah satu sebab pemilihan PPS berbentuk eliptik untuk menjana permukaan adalah kerana persamaan tersebut menghasilkan permukaan yang licin berdasarkan syarat-syarat sempadan tertentu. Syarat sempadan yang diperlukan untuk mencari suatu penyelesaian biasanya diberikan dalam pelbagai bentuk fungsi yang tertentu bersama-sama terbitannya disepanjang sisi domain berparameter tersebut.

Empat syarat sempadan dalam kerja mereka adalah dikenali sebagai syarat sempadan macam-Hermit yang terdiri daripada dua lengkung iaitu sepasang lengkung permukaan sempadan yang bertentangan sisi pada arah- u dan sepasang lengkung terbitannya yang menakrif kecerunannya pada kedua-dua sempadan itu. Bentuk persamaannya dapat ditulis seperti berikut:

$$\mathbf{S}(0, v) = f_0(v) , \quad (1.3)$$

$$\mathbf{S}(1, v) = f_1(v) , \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(0, v) = g_0(v) , \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(1, v) = g_1(v) . \quad (1.6)$$

Maka, ungkapan PPS ini boleh digunakan untuk menyelesaikan masalah adunan dalam RBK [5, 6], kerana syarat sempadan yang dinyatakan di atas mengandungi maklumat posisi dan kecerunan sempadannya. Sehubungan itu, PPS peringkat keempat tersebut juga membekalkan keselajaran tangen pada bahagian adunannya.

Kemudian, Bloor dan Wilson [7] telah melanjutkan kajian mereka tentang aplikasi

terhadap teknik PPS tersebut untuk menjana permukaan bentuk bebas cebis-demi-cebis. Dengan mempertimbangkan pelbagai syarat sempadan dan pekali kawalan PPS serta menyambung beberapa tampalan PPS, individu pereka tersebut mampu menjana pelbagai bentuk permukaan yang diingini. Kawalan permukaan PPS ini adalah berbeza daripada kaedah tradisional di mana kaedah ini memberi banyak kelebihan seperti permukaan tersebut hanya memerlukan bilangan parameter yang sedikit untuk menjana suatu permukaan yang licin.

Bloor dan Wilson [15] juga telah membangunkan satu algoritma untuk janaan penghampiran permukaan PPS berdasarkan splin-B piawai menggunakan kaedah kolokasi. Syarat sempadan digunakan untuk menyelesaikan titik kawalan penghampiran splin-B tersebut. Kemudian, hasil tersebut digunakan untuk mendapatkan penyelesaian penghampiran permukaan PPS tersebut. Maka, kerja yang dijalankan ini membuktikan bahawa permukaan PPS sebenarnya setanding dengan teknik-teknik splin lain yang telah matang dan kukuh terutamanya dalam reka bentuk permukaan. Justeru, data-data permukaan PPS adalah sesuai digabungkan dalam sistem reka bentuk komersial atau industri pada masa sekarang.

Walau bagaimanapun, Lowe, Bloor dan Wilson [9] telah menunjukkan satu kaedah di mana kriteria reka bentuk kejuruteraan tertentu seperti sekatan fungsian dapat digabungkan dalam reka bentuk geometri terhadap suatu permukaan PPS. Dalam masa yang sama, beliau memperkenalkan sekatan geometri, kriteria estetika dan halangan kejuruteraan ke dalam proses penjanaan suatu reka bentuk. Oleh itu, kaedah janaan permukaan seperti ini adalah sesuai digunakan untuk masalah reka bentuk optimum. Tambahan, dalam pertengahan tahun 90-an Dekanski *et al.* [16, 17] telah menjana bilah kipas kapal menggunakan PPS eliptik.

Namun demikian, untuk syarat sempadan yang mudah, PPS berbentuk eliptik boleh diselesaikan secara analitikal. Contohnya, permukaan PPS dalam kes ini mempunyai ungkapan berbentuk tertutup yang mana biasanya melibatkan fungsi siri Fourier. Bloor dan Wilson [18] telah menerbitkan satu set penyelesaian penghampiran secara analitik

untuk PPS bagi syarat sempadan yang lebih umum. Penyelesaian penghampiran tersebut boleh dibuat sehingga menghampiri penyelesaian sebenar terhadap sebarang darjah ketepatan. Penyelesaiannya juga boleh dicerakinkan kepada hasil tambah terhingga fungsi Fourier yang memenuhi syarat sempadan PPS dengan penambahan sebutan 'pembetul'.

Pada tahun 1999, Ugail *et al.* [19] telah membangunkan beberapa teknik secara interaktif yang menakrif dan mengubah syarat sempadan bagi penjanaan suatu permukaan PPS. Jadi, tesis ini menumpukan pelanjutan kajian tersebut dengan menjana beberapa contoh reka bentuk permukaan PPS yang melibatkan produk industri seramik seperti pasu, tembikar dan gelas. Daripada tahun 2000 hingga sekarang, Ugail telah membangunkan dan memperluaskan tahap penggunaan kaedah PPS tersebut. Contohnya, menjana permukaan jaring untuk reka bentuk optimum menggunakan kaedah PPS [20], menerangkan penjanaan reka bentuk licin [21], menunjukkan aplikasi kaedah PPS dalam pemodelan bagi mengenalpasti kawasan yang dijangkiti kanser pada bahagian luar kulit manusia [22] dan cara guntingan terhadap suatu permukaan PPS juga dilakukan [23]. Dalam tahun 2007 hingga sekarang, Ugail banyak berkecimpung dalam bidang reka bentuk penjanaan bentuk muka manusia [24] dengan pelbagai teknik baru yang diperkenalkan oleh beliau. Kini, beliau banyak menumpukan perhatian terhadap penjanaan reka bentuk geometri yang melibatkan visual dalam ruang lingkup dunia siber [25]. Bidang RGBK juga menjadi salah satu penyelidikan yang beliau terlibat dalam menghasilkan janaan permukaan yang melibatkan kaedah polinomial splin seperti Bézier dan splin-B [26, 27].

1.4 Sumbangan Kajian

Tesis ini membincangkan mengenai penggunaan PPS untuk menjana reka bentuk permukaan agar potensi teknik PPS diadaptasi sepenuhnya. Dalam situasi masa kini, contohnya setiap bangunan termasuklah rumah, hotel, sekolah dan pejabat harus mempunyai halaman hadapan yang menarik. Halaman hadapan yang menarik dapat memberi rangsangan ketenangan dan semangat kepada individu yang berada di dalam kawasan tersebut. Salah satu hiasan yang selalu diletakkan di halaman hadapan tersebut adalah

pasu. Reka bentuk pasu yang menarik dan mempunyai nilai estetik menjadi pilihan. Peranan reka bentuk pasu tersebut adalah penting terhadap dekorasi halaman hadapan tersebut agar kelihatan sesuai dengan suasana dan menarik untuk dipandang. Oleh itu, sumbangan kajian tesis ini adalah:

- **Manipulasi secara intuisi terhadap suatu objek bagi pelbagai jenis gambaran reka bentuk**

Kajian tentang penggunaan PPS untuk menjana pelbagai jenis gambaran reka bentuk permukaan seperti permukaan berparameter dan permukaan reka bentuk bebas telah dijalankan. Contohnya, kajian tersebut berjaya mengemukakan fungsi sinus pada syarat sempadan dalam penjanaan reka bentuk pasu berlekuk. Fungsi tersebut menawarkan kelebihan pada model tak tersirat untuk menjana lebih banyak reka bentuk dalam famili yang sama dengannya.

- **Menyatakan entiti geometri dengan bilangan koefisien yang minimum**

Disebabkan suatu objek ditakrif sebagai penyelesaian kepada jenis PPS tertentu dengan kekangan syarat sempadan yang dikenakan, reka bentuk pedalaman objek tersebut dijana secara tindak balas automatik melalui sifat-sifat pembezaannya. Penggunaan teknik PPS dalam versi yang telah diubahsuai ini berupaya untuk merangkum semua maklumat terhadap janaan objek itu dengan mengurangkan bebanan yang banyak dalam menentukan kekangan bagi suatu set data. Tambahan juga, kesan hasil janaan tersebut memberi permukaan yang licin semasa manipulasi objek berlaku disebabkan oleh persamaan pembezaannya.

1.5 Susunan Tesis

Dalam tesis ini, Bab 2 membincangkan tentang kaedah PPS. Definisi dan cara-cara penyelesaian yang lengkap terhadap kaedah PPS tersebut dinyatakan. Kemudian, Bab 3 menerangkan penjanaan reka bentuk permukaan menggunakan PPS peringkat kedua, keempat dan keenam. Seterusnya, aplikasi kaedah PPS dihuraikan dalam Bab 4 dan fokus

diberikan kepada model permukaan berparameter. Syarat sempadan dengan fungsi sinus diperkenalkan bagi penjanaan permukaan pasu berlekuk. Perincian perbincangan mengenai aplikasi kaedah PPS terhadap penjanaan permukaan reka bentuk bebas dibincangkan dalam Bab 5 dan bersama-samanya juga diterangkan cara manipulasi permukaan tersebut menggunakan pendekatan kawalan rangka. Akhirnya, kesimpulan ringkas diberikan dan hala tuju kerja penyelidikan yang boleh dilakukan seterusnya juga dinyatakan dalam Bab 6.

BAB 2

PERSAMAAN PEMBEZAAN SEPARA

2.1 Pendahuluan

Persamaan pembezaan separa (PPS) telah memainkan peranan yang penting pada masa kini termasuk juga dalam bidang komputer grafik. PPS juga boleh dianggap sebagai nadi terhadap kebanyakan model analisis komputer atau simulasi sistem fizikal selanjar seperti dalam bidang bendalir, bidang elektromagnetik, bidang reka bentuk tubuh manusia dan sebagainya. Aplikasi PPS semakin hari semakin popular. Hal ini disebabkan berlakunya perkembangan penyelidikan dengan cepat dan selari dengan kecanggihan teknologi siber yang memerlukan suatu model atau simulasi terhadap sesuatu bentuk alam nyata ke dalam bentuk visual. Antara kaedah PPS yang meluas digunakan adalah seperti persamaan resapan, persamaan haba, persamaan Laplace, persamaan gelombang dan persamaan dinamik bendalir. Tambahan pula, kebanyakan teknik pemodelan geometri dan aplikasi reka bentuk berbantu komputer (RBK) dan reka bentuk geometri berbantu komputer (RGBK) adalah berhubung-kait dengan sebahagian PPS tersebut. Maka, ringkasan pengenalan terhadap PPS beserta jenis-jenis pengelasannya dan pemodelan reka bentuk permukaan PPS diberikan dalam bab ini.

2.2 Definisi PPS

Persamaan pembezaan separa (PPS) ialah suatu persamaan yang melibatkan suatu fungsi tak diketahui lebih daripada satu pembolehubah bersandar dan terbitan-terbitan separanya [28]. (2.1) menunjukkan satu contoh PPS peringkat- r bagi domain berparameter $2D$ terhadap u dan v .

$$\sum_{n=0}^r \sum_{l+m=n} \alpha_{l,m}(u, v) \frac{\partial^n}{\partial u^l \partial v^m} \mathbf{S}(u, v) = G(u, v), \quad (2.1)$$

dengan $\alpha_{l,m}(u, v)$, $G(u, v)$ adalah fungsi kawalan dan $\mathbf{S}(u, v)$ ialah fungsi anu terhadap u dan v . Diperhatikan bahawa penyelesaian kepada persamaan jenis ini adalah licin dalam konteks pembezaannya adalah tak terhingga. Sebutan di sebelah kanan dalam (2.1) adalah disebut sebagai fungsi daya [29, 30] dan dapat digunakan untuk menghasilkan perubahan pedalaman terhadap reka bentuk permukaan tersebut [31]. Walau bagaimanapun, dalam keseluruhan tesis ini hanya kes $G(u, v) = 0$ atau juga boleh disebut sebagai persamaan homogen digunapakai untuk mengilustrasikan keadaan kawalan terhadap reka bentuk permukaan yang dapat dijana dengan mengenakan syarat sempadan tertentu.

Oleh itu, dengan merujuk kepada kebanyakan buku matematik [28, 32, 33, 34] PPS boleh dikelaskan kepada tiga kategori iaitu eliptik, parabolik dan hiperbolik. Bahagian seterusnya menjelaskan jenis pengelasan tersebut.

2.3 Pengelasan PPS

Terdapat enam jenis pengelasan bagi suatu PPS [28]. Pengelasan tersebut merupakan suatu konsep yang penting kerana biasanya teori umum dan kaedah penyelesaiannya sesuai untuk suatu kelas persamaan sahaja. Pertimbangkan PPS peringkat kedua terhadap domain $2D$ berikut:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G, \quad (2.2)$$

dengan A, B, C, D, E, F adalah pemalar dan G adalah fungsi sebarang. Berikut adalah jenis pengelasannya.

1. **Peringkat PPS.** Peringkat PPS ialah peringkat terbitan separa yang tertinggi di dalam PPS, misalnya,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{peringkat pertama})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{peringkat kedua})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad (\text{peringkat ketiga})$$

2. **Bilangan Pembolehubah.** Bilangan pembolehubah ialah bilangan pembolehubah tak bersandar, misalnya,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{dua pembolehubah: } x \text{ dan } t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r}\right) \frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{1}{r^2}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad (\text{tiga pembolehubah : } r, \theta \text{ dan } t)$$

3. **Kelinearan.** PPS terbahagi kepada dua bahagian iaitu linear dan tak linear. PPS adalah dikatakan linear jika kesemua fungsi dan terbitannya linear seperti (1.2). Contoh lain misalnya,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin(t) \quad (\text{linear})$$

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u^2 = 0 \quad (\text{tak linear})$$

4. **Kehomogenan.** Kehomogenan terhasil apabila sebutan di sebelah kanan dalam (1.2) ialah sifar bagi semua nilai x dan y dan persamaan tersebut disebut tak homogen jika berlaku sebaliknya.
5. **Jenis Pekali.** Jika pekali A, B, C, D, E, F dalam (2.2) adalah malar, maka (1.2) disebut sebagai mempunyai pekali malar. Jika sebaliknya, persamaan itu dikenali sebagai pekali tak malar.

6. **Tiga Jenis Persamaan Pembezaan Linear.** (2.2) boleh dikelaskan kepada:

- **Eliptik**

PPS jenis eliptik terhasil apabila memenuhi syarat $B^2 - 4AC < 0$. Contoh model tipikalnya ialah persamaan Poisson, iaitu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho(x, y), \quad (2.3)$$

Jika $\rho = 0$, maka persamaan tersebut dikenali sebagai persamaan Laplace.

- **Parabolik**

PPS jenis parabolik terhasil apabila memenuhi syarat $B^2 - 4AC = 0$. Contoh model tipikalnya ialah persamaan haba, iaitu,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.4)$$

- **Hiperbolik**

PPS jenis hiperbolik terhasil apabila memenuhi syarat $B^2 - 4AC > 0$. Contoh model tipikalnya ialah persamaan gelombang satu-dimensi, iaitu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.5)$$

Selain itu, salah satu cara alternatif untuk mengenalpasti jenis PPS ialah berdasarkan bentuk penyelesaian bagi PPS tersebut. Contohnya, persamaan gelombang dan persamaan resapan biasanya boleh diselesaikan melalui maklumat yang diberikan seperti nilai masa awal t_0 , maka penyelesaian tersebut akan membawa kepada penyelesaian evolusi masa. Sebaliknya, persamaan Poisson pula memerlukan kita mencari satu nilai "tetap" fungsi $u(x, y)$ yang memenuhi persamaan tersebut bagi syarat antara ruang (x, y) yang dikehendaki dan juga mempunyai sifat-sifat yang diinginkan pada ruang sempadan tersebut. Maka, jenis permasalahan ini disebut sebagai masalah nilai sempadan dan boleh digunakan dalam reka bentuk geometri. Namun demikian, permasalahan PPS biasanya adalah gabungan daripada dua jenis PPS iaitu masalah nilai sempadan dan nilai awal.

Ringkasan bagi jenis pengelasan PPS yang dinyatakan adalah ditunjukkan seperti dalam Jadual 2.1.

Jadual 2.1: Hubungan antara dua jenis pengelasan PPS

Pengelasan PPS	Eliptik	Parabolik	Hipebolik
Nilai Sempadan	Persamaan Laplace	-	-
Nilai Awal	-	Persamaan Resapan	Persamaan Gelombang

2.4 Penyelesaian PPS

Terdapat pelbagai cara untuk menyelesaikan suatu persamaan pembezaan separa. Antaranya PPS boleh diselesaikan secara analitikal atau dengan menggunakan kaedah berangka seperti kaedah beza terhingga, kaedah unsur terhingga dan kaedah sisa pemberat. Maka, tumpuan dalam bahagian ini adalah untuk menentukan penyelesaian terhadap PPS secara analitikal dengan menggunakan kaedah pemisahan pembolehubah. Dengan cara ini, PPS tersebut dapat dimudahkan kepada beberapa persamaan pembezaan biasa (PPB) dan boleh diselesaikan secara langsung. Walau bagaimanapun, bukan semua PPS boleh dimudahkan kepada PPB.

Pertimbangkan (2.2) dengan nilai $G = 0$, maka persamaan tersebut dikenali sebagai persamaan Laplace. Bagi mencari fungsi u yang memenuhi persamaan Laplace

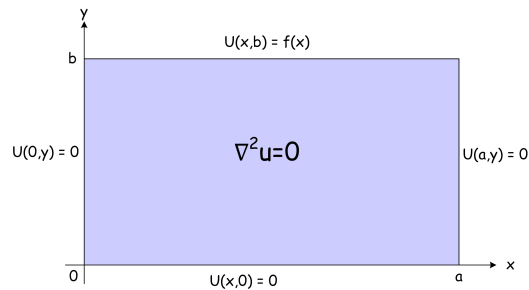
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (2.6)$$

di dalam kawasan $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ dan juga memenuhi syarat sempadan

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0 \\ u(a, y) &= 0 \end{aligned} \quad 0 < y < b \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0 \\ u(x, b) &= f(x) \end{aligned} \quad 0 < x < a \quad (2.8)$$

Rajah 2.1 menggambarkan maklumat tentang persamaan Laplace dalam segiempat. Sebenarnya, pelbagai jenis syarat sempadan boleh diletakkan pada (2.6). Maklumat yang diberikan hanya sebagai contoh.



Rajah 2.1: Persamaan Laplace dalam segiempat

Algoritma penyelesaian bagi (2.6) tertakluk kepada syarat-syarat nilai sempadan (2.7) dan (2.8) adalah seperti berikut:

- (I) Gunakan kaedah pemisahan pembolehubah untuk memisahkan (2.6) kepada dua PPB.
- (II) Jelmakan syarat-syarat (2.7) dan (2.8) kepada syarat nilai sempadan yang sesuai bagi kedua-dua PPB tersebut dalam langkah (I).
- (III) Pilih penyelesaian-penyelesaian tertentu yang memenuhi PPB yang timbul dalam langkah (I), penyelesaian-penyelesaian ini juga memenuhi separuh daripada syarat sempadan yang timbul dalam langkah (II). Penyelesaian-penyelesaian ini biasanya dikenali sebagai *penyelesaian asasi*.
- (IV) Bentukkan suatu gabungan linear dari penyelesaian-penyelesaian asas yang timbul dari langkah (III) supaya gabungan ini memenuhi semua syarat nilai sempadan tersebut dalam langkah (II).

[LANGKAH I]

Kita anggap bahawa

$$u(x, y) = X(x) \cdot Y(y), \quad (2.9)$$

dengan X adalah fungsi x sahaja dan Y adalah fungsi y sahaja. Jika kita gantikan (2.9) ke dalam (2.6), maka kita dapati

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0, \quad (2.10)$$

atau

$$-\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}. \quad (2.11)$$

Perhatikan bahawa kita telah pisahkan bahagian yang mengandungi x daripada bahagian yang mengandungi y . Di sebelah kiri (2.11), kita memperoleh fungsi x manakala di sebelah kanan pula kita memperoleh fungsi y . Jadi, (2.11) sah hanya jika kedua-dua belah adalah suatu pemalar, katakan λ . Pemalar ini dikenali sebagai pemalar pemisahan.

Maka, (2.11) menjadi

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = \lambda, \quad (2.12)$$

yang boleh ditulis dalam dua PPB seperti berikut:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (2.13)$$

$$Y'' - \lambda Y = 0. \quad (2.14)$$

[LANGKAH II]

Nilai sempadan (2.7) dan (2.8) bererti $X(0)Y(y) = 0$, dan $X(a)Y(y) = 0$ bagi semua $0 < y < b$. Kedua-dua persamaan di atas boleh dipenuhi jika kita memilih

(i) $Y(y)=0$, untuk semua $0 < y < b$ atau

(ii) $X(0)=0$ dan $X(a)=0$.

Tetapi kalau $Y(y) = 0$ untuk semua $0 < y < b$, ini bermakna penyelesaian $u = XY$ berbentuk (2.9) adalah sifar, yang tidak memberi apa-apa erti. Jadi, kita perlulah memilih

$$X(0) = 0 \quad \text{dan} \quad X(a) = 0. \quad (2.15)$$

Demikian juga nilai sempadan pertama dari (2.8) akan menjadi

$$X(x)Y(0) = 0, \quad \text{untuk} \quad 0 \leq x \leq a.$$

Sekali lagi kerana kita ingin mencari penyelesaian yang bukan sifar, persamaan di atas menunjukkan bahawa

$$Y(0) = 0. \quad (2.16)$$

Sekarang nilai sempadan yang kedua dari (2.8) ialah

$$u(x, b) = f(x), \quad 0 \leq x \leq a. \quad (2.17)$$

Jadi, syarat-syarat sempadan adalah persamaan (2.15), (2.16) dan (2.17).

[LANGKAH III]

Sekarang, pertimbangkan (2.13) dan (2.15) dan kita akan mencari nilai λ supaya masalah nilai sempadan tersebut mempunyai penyelesaian tak remeh. Anggapkan bahawa λ nyata dan tidak negatif, $\lambda \geq 0$. Jadi, langkah awal adalah pisahkan $\lambda \geq 0$ kepada dua bahagian iaitu (i) $\lambda = 0$ dan (ii) $\lambda > 0$.

(i) $\lambda = 0$

Jika $\lambda = 0$, maka (2.13) menjadi $X'' = 0$ yang mempunyai penyelesaian am $X = c_1x + c_2$ dengan c_1, c_2 adalah pemalar sebarang. Bagi memenuhi syarat-syarat (2.15), kita mesti mempunyai $c_1 \cdot 0 + c_2 = 0$ dan $c_1 \cdot a + c_2 = 0$. Jadi, penyelesaian tunggal bagi persamaan serentak (2.13) dengan (2.15) adalah $c_1 = c_2 = 0$. Ini bererti apabila $\lambda = 0$, masalah nilai sempadan (2.13) dan (2.15) hanya mempunyai penyelesaian remeh, $X \equiv 0$.

(ii) $\lambda > 0$

Anggapkan bahawa $\lambda = \omega^2$ dengan $\omega^2 > 0$. Maka, (2.13) menjadi $X'' + \omega^2 X = 0$ yang mempunyai penyelesaian am $X = c_1 \sin \omega x + c_2 \cos \omega x$. Bagi memenuhi syarat sempadan (2.15), kita mesti mempunyai $c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 = 0$ dan $c_1 \cdot \sin(\omega a) +$

$c_2 \cdot \cos(\omega a) = 0$. Jadi, persamaan pertama menjadi $c_2 = 0$ dan persamaan kedua menjadi $c_1 \sin(\omega a) = 0$. Dengan pemerhatian ini dapat disimpulkan bahawa $c_1 \neq 0$ jika dan hanya jika $\sin(\omega a) = 0$ iaitu jika dan hanya jika $\omega = \frac{n\pi}{a}$ untuk semua integer positif n .

Ringkasnya, masalah nilai sempadan (2.13) dan (2.15) mempunyai penyelesaian tak re-meh jika dan hanya jika $\lambda = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ dan penyelesaian sepadan dengan $\lambda = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ adalah $\sin(\omega x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$ dengan n adalah integer positif.

[LANGKAH IV]

Perhatikan bahawa syarat sempadan (2.17) belum dipertimbangkan lagi. Jadi, untuk memenuhi syarat sempadan (2.17) tersebut, pemilihan c_n mestilah sesuai. Pemilihan c_n tertakluk kepada fungsi $f(x)$ (2.17). Maka, penyelesaian bagi (2.6), (2.7) dan (2.8) dengan $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$ didapati bahawa

$$u(x, b) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right). \quad (2.18)$$

Berdasarkan perbincangan di atas, persamaan Laplace tersebut tidak mengandungi syarat terbitan pada nilai sempadannya. Jadi, perbincangan seterusnya akan menerangkan penyelesaian yang mempunyai nilai syarat sempadan dan nilai syarat terbitan dengan menggunakan kaedah pemisahan pembolehubah. Terlebih dahulu, teori asas pemisahan pembolehubah akan diberikan agar lebih jelas.

2.4.1 Teori Asas Pemisahan Pembolehubah

Pertimbangkan (2.19) berikut:

$$AS_{uu} + BS_{vv} + CS_u + DS_v + ES + FS = 0, \quad (2.19)$$

dengan A, C, E adalah fungsi u dan B, D, F adalah fungsi v . Penyelesaian bagi (2.19) ini ialah hasil darab antara fungsi u dengan fungsi v adalah seperti berikut,

$$S(u, v) = F(u)G(v). \quad (2.20)$$

Dengan mendapatkan terbitan separa S_u, S_v, S_{uu}, S_{vv} dan menggantikannya ke dalam (2.19), akan menghasilkan

$$AF''G + BFG'' + CF'G + DFG' + EFG + FFG = 0. \quad (2.21)$$

Seterusnya jika persamaan ini dibahagikan dengan $F \cdot G$, persamaan ini menjadi satu persamaan iaitu pada sebelah kiri hanya bergantung pada pembolehubah u dan sebelah kanan pula hanya bergantung pada pembolehubah v ,

$$\frac{(AF'' + CF' + EF)}{F} = \frac{-(BG'' + DG' + FG)}{G}. \quad (2.22)$$

Dengan menganggapkan (2.22) suatu pemalar, katakan λ , maka persamaan yang diperolehi ialah dua PPB iaitu:

$$AF'' + CF' + EF - \lambda F = 0, \quad (2.23)$$

$$BG'' + DG' + FG + \lambda G = 0. \quad (2.24)$$

Maka, jelaslah bahawa PPS berbentuk (2.19) boleh diselesaikan dengan kaedah pemisahan pembolehubah. Idea amnya ialah ada kemungkinan kita dapat mencari penyelesaian tak terhingga banyaknya bagi PPS (yang memenuhi syarat awal). Fungsi mudah

$$S_n(u, v) = F_n(u)G_n(v), \quad (2.25)$$

yang dipanggil penyelesaian asasi adalah asas pembinaan kepada masalah yang dibincangkan di atas. Jadi, penyelesaian $s(u, v)$ yang dicari boleh didapati dengan menam-

bahkan penyelesaian asasi tersebut, $F_n(u)G_n(v)$ supaya hasil tambahnya ialah

$$\sum A_n F_n(u)G_n(v), \quad (2.26)$$

yang memenuhi syarat awal. Oleh sebab hasil tambah ini memenuhi PPS dan syarat awal, maka kita telah pun memperoleh penyelesaian terhadap masalah tersebut. Pada bahagian seterusnya, kita akan melebarkan perbincangan tentang kaedah pemisahan pembolehubah dengan lebih terperinci lagi.

2.4.2 Kaedah Pemisahan Pembolehubah

[LANGKAH 1] (Mencari penyelesaian permulaan bagi PPS)

Kita ingin mencari fungsi $S(u, v)$ yang memenuhi keempat-empat syarat berikut:

$$\text{PPS} \quad S = \alpha^2 S_{uu} \quad 0 < u < 1, \quad 0 < v < \infty \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \text{Syarat Sempadan} \quad u(0, v) &= 0 \\ u(1, v) &= 0 \end{aligned} \quad 0 < v < 1 \quad (2.28)$$

$$\text{Syarat Awal} \quad S(u, 0) = \phi(u) \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (2.29)$$

Untuk melakukannya, kita perlu mencari suatu penyelesaian yang berbentuk $S(u, v) = F(u)G(v)$ dengan menggantikan $F(u)G(v)$ ke dalam PPS dan selesaikan untuk $F(u)G(v)$.

Penggantian ini menghasilkan

$$F(u)G'(v) = \alpha^2 F''(u)G(v). \quad (2.30)$$

Kemudian, kedua-dua belah (2.30) dibahagi dengan $\alpha^2 F(u)G(v)$ dan kita dapati

$$\frac{F''(u)}{F(u)} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{G'(v)}{G(v)}. \quad (2.31)$$

Perhatikan bahawa kita telah memisahkan bahagian mengandungi u daripada bahagian yang mengandungi v . Di sebelah kiri (2.31), kita memperoleh fungsi u manakala di sebelah kanan pula kita memperoleh fungsi v sahaja. Jadi, (2.31) sah hanya jika kedua-dua belah adalah satu pemalar, katakan λ . Pemalar ini dikenali sebagai *pemalar pemisahan*. Maka, (2.31) menjadi

$$\frac{F''(u)}{F(u)} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{G''(v)}{G(v)} = -\lambda^2, \quad (2.32)$$

yang boleh ditulis dalam dua PPB seperti berikut:

$$F'' + \lambda^2 F = 0, \quad (2.33)$$

$$G'' + \alpha^2 \lambda^2 G = 0. \quad (2.34)$$

Oleh itu, sekarang ini kita telah berjaya menukar PPS kepada PPB bagi memudahkan kita menyelesaikannya. Namun demikian, (2.33) dan (2.34) merupakan PPB berbentuk piawai yang mempunyai penyelesaian

$$F(u) = C_1 \cos(\lambda u) + C_2 \sin(\lambda u), \quad (2.35)$$

$$G(v) = C_3 e^{-\lambda^2 \alpha^2 v}. \quad (2.36)$$

dengan C_1, C_2, C_3 adalah pemalar sebarang. Jadi, fungsi $s(u, v)$ dapat ditulis sebagai

$$s(u, v) = e^{-\lambda^2 \alpha^2 v} [A \cos(\lambda u) + B \sin(\lambda u)], \quad (2.37)$$

dengan A, B adalah pemalar sebarang. (2.37) akan memenuhi PPS iaitu $s_v = \alpha^2 s_{uu}$. Tetapi buat masa ini, kita hanya memperoleh fungsi yang tak terhingga banyaknya yang memenuhi PPS.

[LANGKAH 2] (Mencari penyelesaian terhadap PPS dan Syarat Sempadan)

Sekarang kita telah mempunyai penyelesaian terhadap PPS tetapi tidak kesemuanya

memenuhi syarat sempadan dan syarat awal. Langkah berikut ialah untuk memilih subset tertentu daripada penyelesaian berikut:

$$s(u, v) = e^{-\lambda^2 \alpha^2 v} [A \cos(\lambda u) + B \sin(\lambda u)], \quad (2.38)$$

yang memenuhi syarat sempadan

$$s(0, v) = 0, \quad (2.39)$$

$$s(1, v) = 0. \quad (2.40)$$

Untuk berbuat demikian, kita perlu menggantikan penyelesaian (2.38) ke dalam (2.39) dan (2.40) seperti berikut:

$$s(0, v) = B e^{-\lambda^2 \alpha^2 v} = 0 \quad \Rightarrow B = 0, \quad (2.41)$$

$$s(1, v) = A e^{-\lambda^2 \alpha^2 v} \sin(\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \sin(\lambda) = 0. \quad (2.42)$$

Jadi, syarat sempadan ini menghalang pemalar pemisahan λ dari mengambil sebarang nombor bukan sifar. Ia mestilah menjadi punca bagi persamaan $\sin(\lambda) = 0$. Dengan kata lain, untuk memenuhi (2.41), kita memilih

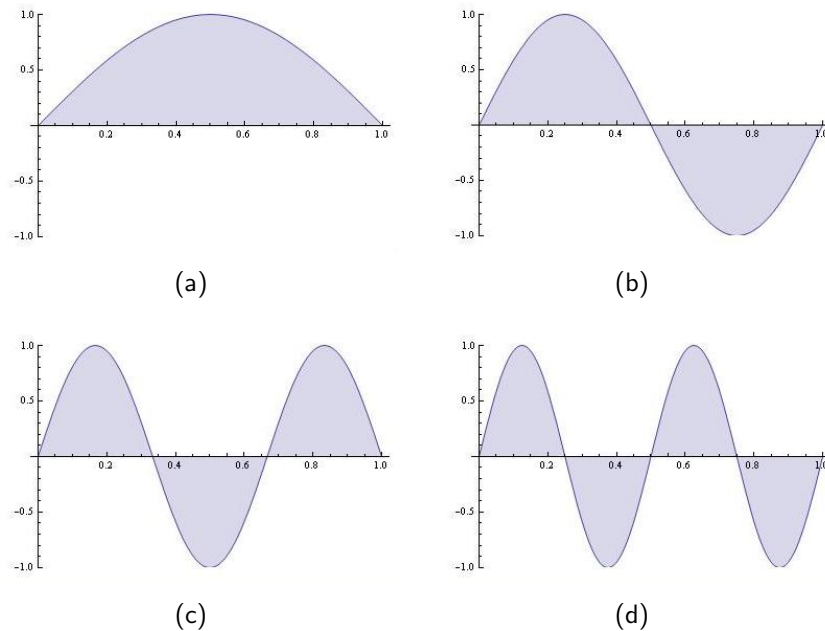
$$\lambda_n = \pm n\pi, \quad n=1,2,3,\dots,k \quad (2.43)$$

Perhatikan bahawa (2.42) juga boleh menyarankan supaya $A = 0$. Jika kita memper-timbangkan kes ini, kita akan dapati penyelesaian bagi (2.38) adalah sifar. Sekarang, langkah kedua telah pun selesai dan kita juga telah menemui fungsi yang tak terhingga banyaknya iaitu

$$s_n(u, v) = A_n e^{-(n\lambda\alpha)^2 v} \sin(n\lambda u), \quad n=1,2,3,\dots,k \quad (2.44)$$

dengan setiap satunya memenuhi PPS dan syarat sempadan. Inilah asas pembinaan masalah ini dan penyelesaian yang diinginkan terdiri daripada hasil tambah tertentu bagi

fungsi mudah tersebut. Hasil tambah tertentu tersebut akan bergantung kepada syarat awal. Rajah 2.2 menunjukkan graf penyelesaian asasi $s_n(u, v)$ dengan $n = 1$ bagi Rajah 2.2(a), $n = 2$ bagi Rajah 2.2(b), $n = 3$ bagi Rajah 2.2(c) dan $n = 4$ bagi Rajah 2.2(d).



Rajah 2.2: Penyelesaian asasi $s_n(u, v) = A_n e^{-(n\lambda\alpha)^2 v} \sin(n\lambda u)$

[LANGKAH 3] (Mencari penyelesaian terhadap PPS, Syarat Sempadan dan Syarat Awal)

Langkah terakhir ialah untuk menambahkan penyelesaian asasi

$$s(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n\pi\alpha)^2 v} \sin(n\pi u), \quad (2.45)$$

dengan memilih pekali A_n supaya syarat awal

$$s(u, v) = \phi(u), \quad (2.46)$$

dipenuhi. Dengan menggantikan persamaan (2.45) ke dalam (2.46), kita dapati

$$\phi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi u). \quad (2.47)$$

Untuk mendapatkan nilai bagi A_n , kita perlu menggunakan siri Fourier yang akan dibincangkan dalam bahagian seterusnya [35].

2.5 Siri Fourier

Sebelum perbincangan diteruskan terhadap siri Fourier, ada baiknya diberikan sejarah ringkas penemuan siri Fourier tersebut. Kronologi penemuan siri Fourier adalah seperti berikut:

- (1642-1727) Penemuan kalkulus oleh Newton
- (1646-1716) Penemuan kalkulus oleh Leibnitz
- (1685-1731) Sumbangan awal kepada teori getaran tali oleh Brook Taylor
- (1707-1782) Terlibat bersama dalam teori getaran tali ialah Deniel Bernoulli
- (1717-1883) Terlibat bersama dalam teori getaran tali ialah Jean d'Alembert
- (1768-1830) Penyiasatan terawal mengenai resapan haba oleh Jean Baptise Joseph Fourier

Ahli matematik fizik Perancis iaitu Josep Fourier telah bekerja sebagai penyelia di Jabatan Isere (Grenoble) pada tahun 1801 hingga 1815. Beliau telah menunjukkan banyak contoh tentang siri trigonometri dan hubungannya dengan masalah nilai sempadan dalam pengaliran haba. Pada tahun 1811, beliau telah membentangkan kertas kerjanya mengenai resapan haba. Malangnya kertas kerja tersebut mendapat kritikan terutamanya daripada Langrange. Kertas kerja tersebut tidak diterbitkan. Namun, beliau tidak berputus asa dan terus menyambung penyelidikannya. Dalam tahun 1822, beliau telah menerbitkan sebuah buku matematik gunaan klasik berjudul *Theorie analytique de la chaler* yang menerangkan tentang teori klasik resapan haba. Buku ini merupakan semakan yang ketiga daripada monograf yang telah dihantar kepada Institut de France pada 21 Disember 1807. Beliau juga telah menjelaskan dengan berkesan