



UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
2016/2017 Academic Session

June 2017

MSG 328 – Introduction to Modelling
[Pengenalan Pemodelan]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of EIGHT pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LAPAN muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all five** [5] questions.

[Arahan: Jawab **semua lima** [5] soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

Question 1

- (a) One of the very powerful simplifying relationships in mathematical modelling is proportionality. Write a clear definition of a proportional relationship.
- (b) If an architectural drawing is using a scale that 0.75 inches represents 4 feet, what length represents 27 feet?
- (c) Determine whether the data in Table 1 support a proportionality argument for j being proportional with $k^{\frac{1}{2}}$.

Table 1: Relationship between j and k

k	j
3	3.5
6	5
9	6
12	7
15	8

[100 marks]

Soalan 1

- (a) Salah satu kaedah yang paling berkesan untuk memudahkan hubungan dalam model matematik adalah kekadaran. Tuliskan secara jelas definisi hubungan kekadaran.
- (b) Jika sebuah lukisan seni bina menggunakan skala 0.75 inci mewakili 4 kaki, berapakah panjang yang mewakili 27 kaki?
- (c) Tentusahkan samada data di dalam Jadual 1 menyokong hujah kekadaran di mana j berkadaran dengan $k^{\frac{1}{2}}$.

Jadual 2: Hubungan antara j dan k

k	j
3	3.5
6	5
9	6
12	7
15	8

[100 markah]

Question 2

- (a) Find the solution to the difference equations and the equilibrium value (if one exists). Discuss the long term behaviour of the solution and classify the equilibrium value as stable or unstable:
- (i) $c_{n+1} = -c_n + 2, \quad c_0 = 1.$
- (ii) $c_{n+1} = -3c_n + 4, \quad c_0 = 5.$
- (b) The data in Table 2 show the number of HIV cases in Malaysia from years 2010-2014. If p_n denotes the number of cases after n years,
- (i) calculate and plot the change, Δp_n versus p_n . Does the graph reasonably approximate a linear relationship?
- (ii) formulate a dynamical system model to estimate the change in the number of HIV cases.

Table 2: Number of HIV cases in Malaysia for years 2010-2014

Year	Number of HIV cases
2010	91362
2011	94841
2012	98299
2013	101732
2014	105139

[100 marks]

Soalan 2

- (a) Cari penyelesaian kepada persamaan pembezaan yang berikut dan juga nilai keseimbangan (sekiranya wujud). Bincangkan sifat jangka panjang kepada penyelesaian yang diperoleh dan kelaskan nilai keseimbangan sebagai stabil atau tidak stabil.

(i) $c_{n+1} = -c_n + 2, \quad c_0 = 1.$

(ii) $c_{n+1} = -3c_n + 4, \quad c_0 = 5.$

- (b) Data di dalam Jadual 2 menunjukkan jumlah kes HIV di Malaysia dari tahun 2010-2014. Jika p_n mewakili bilangan kes selepas n tahun,
- kira dan plot perubahan, Δp_n melawan p_n . Adakah graf yang diperoleh menggambarkan penyelesaian penghampiran kepada sebuah hubungan linear?
 - rumuskan sebuah model sistem dinamik untuk menganggarkan perubahan di dalam bilangan kes HIV.

Jadual 2: Bilangan kes HIV di Malaysia pada tahun 2010-2014

Tahun	Bilangan kes HIV
2010	91362
2011	94841
2012	98299
2013	101732
2014	105139

[100 markah]

Question 3

The human body encounters both good and bad bacteria daily. Good bacteria help us digest our food and protect us from bad bacteria that can make us sick or even kill us. The data in Table 3 show the number of good bacteria (measured in colony-forming-unit (CFU)) collected from a specially prepared experiment.

Table 3: Population of good bacteria

No. of days	Amount of bacteria (CFU)
1	710
2	850
3	1000
4	1200
5	1400
6	1700
7	2000
8	2400
9	2700
10	3150

- (a) Examine closely the system of equations that result when you fit the model into a straight line $y_1 = ax + b$. Formula for finding the slope and intercept of the straight line is given as follows:

$$a = \frac{m \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{m \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2},$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i y_i \sum x_i}{m \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}.$$

- (b) Based on the result obtained in (a), predict when will the amount of the good bacteria will reach 5000 CFU?

[100 marks]

Soalan 3

Badan manusia bertindak balas dengan bakteria baik dan jahat setiap hari. Bacteria baik membantu kita untuk menghadamkan makanan dan melindungi kita daripada bakteria jahat yang boleh membawa penyakit ataupun kematian. Data di dalam Jadual 3 menunjukkan bilangan bakteria baik (diukur dalam unit-pembentuk-koloni (UPK)) yang dikumpul daripada sebuah ujikaji khas.

Jadual 3: Populasi bakteria baik

Bilangan hari	Bilangan bakteria (UPK)
1	710
2	850
3	1000
4	1200
5	1400
6	1700
7	2000
8	2400
9	2700
10	3150

- (a) Periksa dengan teliti sistem persamaan yang terhasil apabila model garis lurus $y_1 = ax + b$ dipadankan. Formula untuk mencari kecerunan dan pintasan garis lurus tersebut diberikan seperti berikut:

$$a = \frac{m \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{m \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2},$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i y_i \sum x_i}{m \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}.$$

- (b) Berdasarkan jawapan yang diperoleh di (a), ramalkan bila bilangan bakteria baik tersebut akan mencecah 5000 UPK?

[100 markah]

Question 4

- (a) Find both the maximum and minimum solutions of the following problem using graphical analysis.

Optimize $2x + 3y$
subject to

$$\begin{aligned} 2x + 3y &\geq 6, \\ 3x - y &\leq 15, \\ -x + y &\leq 4, \\ 2x + 5y &\leq 27, \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

- (b) A fertilizer manufacturer uses two materials, nitrates and phosphates, to make two different varieties of fertilizer. A single batch of Sod-King needs 4 units of phosphate and 18 units of nitrate, while a single batch of Gro-Turf uses 1 unit of phosphate and 15 units of nitrate. The profit on a batch of Sod-King is RM1000, and the profit on a batch of Gro-Turf is RM500. The company has 10 units of phosphate and 66 units of nitrate in hand. How many batches of each type should the company make from the available supplies if it wishes to earn the most profit?

[100 marks]

Soalan 4

- (a) Cari penyelesaian maksimum dan minimum bagi masalah berikut dengan menggunakan analisis graf.

Optimumkan $2x + 3y$
tertakluk pada

$$\begin{aligned} 2x + 3y &\geq 6, \\ 3x - y &\leq 15, \\ -x + y &\leq 4, \\ 2x + 5y &\leq 27, \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

- (b) Sebuah syarikat pembuatan baja menggunakan dua bahan iaitu nitrat dan fosfat untuk menghasilkan dua jenis baja yang berbeza. Satu kumpulan baja Sod-King memerlukan 4 unit fosfat dan 18 unit nitrat manakala satu kumpulan baja Gro-Turf memerlukan 1 unit fosfat dan 15 unit nitrat. Keuntungan bagi satu kumpulan baja Sod-King adalah RM1000 dan keuntungan bagi satu kumpulan baja Gro-Turf adalah RM500. Syarikat tersebut mempunyai 10 unit fosfat dan 66 unit nitrat di dalam simpanan. Berapakah bilangan kumpulan bagi setiap jenis baja tersebut yang perlu dihasilkan daripada bekalan yang ada sekiranya syarikat ini ingin memperoleh keuntungan yang paling tinggi?

[100 markah]

Question 5

- (a) The logistic equation for population growth can be written as

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{K} \right),$$

where $P(t)$ is the population at time t . Given that K is the carrying capacity of the environment. Solve the given logistic equation.

- (b) The population of the United States in 1800 and 1850 was 5.3 million and 23.1 million people respectively. Based on the given information, answer the following questions:
- (i) Predict its population in 1900 and in 1950 using the exponential model of population growth.
 - (ii) Then considering that the population of the United State in 1900 was actually 76 million people, correct your prediction for 1950 using the logistic model of population growth
(Hint: use $k = 0.031476$ in the model.)
 - (iii) What is the carrying capacity of the United States according to this logistic model?

[100 marks]

Soalan 5

- (a) *Persamaan logistik untuk pertumbuhan populasi boleh ditulis sebagai*

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{K} \right),$$

di mana $P(t)$ adalah populasi penduduk pada masa t . Diberi K sebagai daya tampung persekitaran. Selesaikan persamaan logistik yang diberi.

- (b) *Populasi bagi negara Amerika Syarikat pada 1800 dan 1850 adalah 5.3 juta dan 23.1 juta orang masing-masing. Berdasarkan maklumat yang diberi, jawab soalan yang berikut:*
- (i) *Ramalkan populasi bagi tahun 1900 dan 1950 dengan menggunakan model eksponen bagi pertumbuhan populasi.*
 - (ii) *Memandangkan populasi bagi negara Amerika Syarikat pada 1900 adalah 76 juta orang, perbaiki ramalan anda bagi tahun 1950 dengan menggunakan model logistik bagi pertumbuhan populasi.
(Petunjuk: guna $k=0.031476$ dalam model tersebut.)*
 - (iii) *Apakah daya tampung bagi negara Amerika Syarikat berdasarkan model logistik ini?*

[100 markah]