



UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination  
2016/2017 Academic Session

June 2017

**MAT203 – Vector Calculus**  
**[Kalkulus Vektor]**

Duration : 3 hours  
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of SIX pages of printed material before you begin the examination.

[*Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi ENAM muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.*]

**Instructions:** Answer **SIX** (6) questions.

**Arahan:** Jawab **SIX** (6) soalan].

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[*Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai.*]

**Question 1**

- (a) Find two unit vectors (that is, of length one) orthogonal to both  $\mathbf{u}$  and  $\mathbf{v}$  where  $\mathbf{u} = \langle -6, 2, 1 \rangle$  and  $\mathbf{v} = \langle 6, 0, 3 \rangle$ .
- (b) Consider the plane  $x + y + z = 0$ .
- (i) Give three distinct points with integer coordinates that lie on this plane.
- (ii) Find the area of the triangle formed by those three points.
- (c) Find the distance between the following two straight lines:

$$L_1: \langle x, y, z \rangle = \langle 0, 1, 2 \rangle + t \langle 1, 1, 0 \rangle \quad \text{and}$$

$$L_2: \langle x, y, z \rangle = \langle 1, -1, 3 \rangle + t \langle 1, 1, 0 \rangle.$$

[ 15 marks ]

**Soalan 1**

- (a) Cari dua vektor unit (bermagnitud satu) yang berserenjang dengan kedua-dua  $\mathbf{u}$  dan  $\mathbf{v}$  di mana  $\mathbf{u} = \langle -6, 2, 1 \rangle$  dan  $\mathbf{v} = \langle 6, 0, 3 \rangle$ .
- (b) Pertimbangkan satah  $x + y + z = 0$ .
- (i) Berikan tiga titik berbeza dengan koordinat integer yang terletak pada satah ini.
- (ii) Cari luas segitiga yang dibentuk dengan tiga titik tersebut.
- (c) Cari jarak di antara kedua-dua garis lurus berikut:

$$L_1: \langle x, y, z \rangle = \langle 0, 1, 2 \rangle + t \langle 1, 1, 0 \rangle \quad \text{dan}$$

$$L_2: \langle x, y, z \rangle = \langle 1, -1, 3 \rangle + t \langle 1, 1, 0 \rangle.$$

[ 15 markah ]

**Question 2**

Consider the four points  $P_1 = (5, 2, 0)$ ,  $P_2 = (1, 5, -1)$ ,  $P_3 = (1, 7, 3)$  and  $P_4 = (4, 6, 3)$  in  $\mathbb{R}^3$ .

- Find the equation for the plane consisting of all points equidistant from  $P_1$  and  $P_2$ .
- Do the same for  $P_1$  and  $P_3$ , and for  $P_1$  and  $P_4$ .
- Suppose that all four points lie on the surface of a sphere  $S$ . Determine the center point of  $S$ .

[ 12 marks ]

**Soalan 2**

Pertimbangkan empat titik  $P_1(5, 2, 0)$ ,  $P_2(1, 5, -1)$ ,  $P_3(1, 7, 3)$  dan  $P_4(4, 6, 3)$  dalam  $\mathbb{R}^3$ .

- Cari persamaan untuk satah yang mengandungi semua titik yang berjarak sama dari  $P_1$  dan  $P_2$ .
- Lakukan yang sama untuk  $P_1$  dan  $P_3$ , dan untuk  $P_1$  dan  $P_4$ .
- Andaikan keempat-empat titik terletak pada permukaan sfera  $S$ . Tentukan titik pusat  $S$ .

[ 12 markah ]

**Question 3**

- Consider the coordinates  $u, v$  on  $\mathbb{R}^2$  defined by the equations:

$$x = uv \quad \text{and} \quad y = \frac{1}{2}(u^2 - v^2).$$

- Determine  $\frac{\partial x}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial y}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial x}{\partial v}$  and  $\frac{\partial y}{\partial v}$ . Write your answers in terms of  $u$  and  $v$ .
  - Determine  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$  and  $\frac{\partial v}{\partial y}$ . Write your answers in terms of  $u$  and  $v$ .
- Find an equation of the tangent plane to the surface  $z = e^{x^2 - y^2}$ , at the point  $(1, -1, 1)$ .
  - Find three positive numbers  $x, y$ , and  $z$  whose sum is 300 and whose product is as large as possible.

[ 18 marks ]

...4/-

**Soalan 3**

- (a) Pertimbangkan koordinat-koordinat  $u, v$  dalam  $\mathbb{R}^2$  ditakrifkan oleh persamaan:

$$x = uv \quad \text{dan} \quad y = \frac{1}{2}(u^2 - v^2).$$

- (i) Tentukan  $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}$  dan  $\frac{\partial y}{\partial v}$ . Tuliskan jawapan anda dalam sebutan  $u$  dan  $v$ .
- (ii) Tentukan  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$  dan  $\frac{\partial v}{\partial y}$ . Tuliskan jawapan anda dalam sebutan  $u$  dan  $v$ .
- (b) Cari persamaan satah tangen pada permukaan  $z = e^{x^2 - y^2}$ , di titik  $(1, -1, 1)$ .
- (c) Cari tiga nombor positif  $x, y$ , dan  $z$  yang mempunyai hasil tambah 300 dan mempunyai hasil darab sebesar yang mungkin.

[ 18 markah ]

**Question 4**

- (a) Let  $R$  be the tetrahedron in  $\mathbb{R}^3$  with vertices  $(0, 0, 1)$ ,  $(0, 0, -1)$ ,  $(1, 1, 0)$  and  $(1, -1, 0)$ . Evaluate the following integral:

$$\iiint_R xy^2 dV.$$

- (b) Verify Fubini's Theorem for the function  $f(x, y) = x^2y - 2$  over the rectangle  $R = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2\}$ .

[ 15 marks ]

**Soalan 4**

- (a) Biar  $R$  suatu tetrahedron dalam  $\mathbb{R}^3$  dengan bucu-bucu  $(0, 0, 1)$ ,  $(0, 0, -1)$ ,  $(1, 1, 0)$  dan  $(1, -1, 0)$ . Nilaikan kamiran berikut:

$$\iiint_R xy^2 dV.$$

- (b) Sahkan Teorem Fubini untuk fungsi  $f(x, y) = x^2y - 2$  di atas segiempat tepat  $R = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2\}$ .

[ 15 markah ]

...5/-

**Question 5**

- (a) Consider the vector-valued function  $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ . Let  $C_1$  be the straight line, and  $C_2$  be the parabola, both connecting from  $(0,0)$  to  $(1,1)$ . Show that  $\mathbf{F}$  is a non-conservative vector field by evaluating the integrals  $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  and  $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ .
- (b) (i) Sketch the ellipse  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  and the circle  $x^2 + y^2 = 25$  on the same coordinate axes.
- (ii) Parameterize the path that travels clockwise around the ellipse.
- (iii) Parameterize the path that travels counter-clockwise around the circle.
- (iv) Use Green's theorem to find the area of the region bounded by  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \geq 1$  and  $x^2 + y^2 \leq 25$ .

[ 20 marks ]

**Soalan 5**

- (a) *Pertimbangkan fungsi bernilai vektor  $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ . Biar  $C_1$  sebagai suatu garis lurus, dan  $C_2$  sebagai suatu parabola, kedua-duanya menyambung dari  $(0,0)$  ke  $(1,1)$ . Tunjukkan bahawa  $\mathbf{F}$  adalah medan vektor bukan abadi dengan menilaikan kamiran  $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  dan  $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ .*
- (b) (i) *Lakarkan elips  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  dan bulatan  $x^2 + y^2 = 25$  pada paksi koordinat yang sama.*
- (ii) *Parameterkan laluan yang mengikut arah ikut jam pada sekeliling elips.*
- (iii) *Parameterkan laluan yang mengikut arah lawan jam pada sekeliling bulatan.*
- (iv) *Gunakan Teorem Green untuk mencari luas kawasan yang dibatasi oleh  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \geq 1$  dan  $x^2 + y^2 \leq 25$ .*

[ 20 markah ]

**Question 6**

Let  $S$  be the surface  $(r-5)^2 + 9z^2 = 9$ .

- (a) Find the parametric equations for the surface  $S$ .
- (b) Consider the vector field  $\mathbf{F}(x, y, z) = \left\langle xz, yz, -\frac{1}{z} \right\rangle$ . Calculate the surface integral

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

[ 20 marks ]

**Soalan 6**

Biar  $S$  sebagai permukaan  $(r-5)^2 + 9z^2 = 9$ .

- (a) Cari persamaan parametrik untuk permukaan  $S$ .
- (b) Pertimbangkan medan vector  $\mathbf{F}(x, y, z) = \left\langle xz, yz, -\frac{1}{z} \right\rangle$ . Kirakan kamiran permukaan

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

[ 20 markah ]