
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
2016/2017 Academic Session

June 2017

MAT 202 Introduction to Analysis
[Pengantar Analisis]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all six** [6] questions.

*[Arahan: Jawab **semua enam** [6] soalan.]*

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai.]

1. (a) For any real number x , let $S = \{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$.
 - (i) Explain why supremum of S exists.
 - (ii) Let $\sup(S) = [x]$. Now let $k \in S$ satisfying $[x] < k + 1$. Show that an integer $m > k$ cannot be an element of S . Then deduce that $[x]$ is an integer.
 - (iii) Show that $x - 1 < [x] \leq x$.
- (b) Let $E \subset \mathbb{R}$ be a nonempty bounded set and $S = \{a - b : a, b \in E\}$.
 - (i) Show that $\sup(E) - \inf(E)$ is an upper bound of S .
 - (ii) Prove that $\sup(S) = \sup(E) - \inf(E)$.

[100 marks]

1. (a) Untuk suatu nombor nyata x , andaikan $S = \{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$.
 - (i) Terangkan mengapa supremum S wujud.
 - (ii) Andaikan $\sup(S) = [x]$. Sekarang katakan $k \in S$ memenuhi $[x] < k + 1$. Tunjukkan bahawa sebarang integer $m > k$ bukan unsur kepada S . Kemudian deduksikan bahawa $[x]$ adalah integer.
 - (iii) Tunjukkan bahawa $x - 1 < [x] \leq x$.
- (b) Katakan $E \subset \mathbb{R}$ set tak kosong yang terbatas dan $S = \{a - b : a, b \in E\}$.
 - (i) Tunjukkan bahawa $\sup(E) - \inf(E)$ ialah batas atas untuk S .
 - (ii) Buktikan bahawa $\sup(S) = \sup(E) - \inf(E)$.

[100 markah]

2. (a) Show that the sum of an irrational number and a rational number is an irrational number.
- (b) Is the product of an irrational number and a rational number is an irrational number? Justify your answer.
- (c) (i) Explain what is meant by an infinite set of real numbers.
(ii) Show that any infinite set of real numbers always has a countably infinite subset.

[100 marks]

2. (a) Tunjukkan bahawa hasil tambah satu nombor tak nisbah dengan satu nombor nisbah ialah nombor tak nisbah.
- (b) Adakah hasil darab satu nombor tak nisbah dengan satu nombor nisbah satu nombor tak nisbah? Jelaskan jawapan anda.
- (c) (i) Terangkan apa maksud set nombor nyata yang tak terhingga.
(ii) Tunjukkan bahawa sebarang set nombor nyata yang tak terhingga sentiasa mempunyai satu subset tak terhingga yang terbilangkan.

[100 markah]

3. (a) Let $\{a_n\}$ be any sequence of real numbers. The n th element a_n is called a *turn back point* or *peak* if $a_n \geq a_m$ for all $m > n$. Show that $\{a_n\}$ has a monotonic subsequence. Then deduce that a bounded sequence $\{a_n\}$ has a convergent subsequence.
- (b) (i) Explain what is meant by a Cauchy sequence of real numbers.
(ii) Prove that a convergent sequence $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ of real numbers is Cauchy.

[100 marks]

3. (a) Katakan $\{a_n\}$ satu jujukan nombor nyata. Sebutan ke- n a_n disebut sebagai titik pusing balik atau puncak jika $a_n \geq a_m$ untuk setiap $m > n$. Tunjukkan bahawa $\{a_n\}$ mempunyai satu subjujukan berekanada. Kemudian, deduksikan bahawa jujukan $\{a_n\}$ yang terbatas mempunyai subjujukan yang menumpu.
- (b) (i) Terangkan apa maksud jujukan Cauchy untuk nombor nyata.
(ii) Buktikan bahawa suatu jujukan nombor nyata $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ yang menumpu adalah Cauchy.

[100 markah]

4. (a) Suppose $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ is continuous. Show that there exists $c \in [0, 1]$ satisfying $f(c) = c$.
- (b) Suppose that $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ is the Dirichlet function given by

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]; \\ 0, & \text{if } x \in [0, 1] - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Let $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ be a partition of the interval $[0, 1]$.

- (i) Find the upper sum $U(\mathcal{P}; f)$ and the lower sum $L(\mathcal{P}; f)$.
(ii) Determine whether f is Riemann integrable or not.

[100 marks]

4. (a) Andaikan $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ selanjar. Tunjukkan bahawa wujud $c \in [0, 1]$ memenuhi $f(c) = c$.
- (b) Andaikan $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ fungsi Dirichlet yang diberikan oleh

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]; \\ 0, & \text{if } x \in [0, 1] - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Katakan $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ suatu petak untuk selang $[0, 1]$.

- (i) Cari hasil tambah atas $U(\mathcal{P}; f)$ dan hasil tambah bawah $L(\mathcal{P}; f)$.
(ii) Tentukan sama ada f terkamirkan secara Riemann atau tidak.

[100 markah]

5. (a) What is a real valued continuous function f on \mathbb{R} in terms of open sets? Suppose now f is continuous on \mathbb{R} .
- (i) Show that $\{x : f(x) > c\}$ is an open set for any constant c .
 - (ii) If the function g is continuous on \mathbb{R} , show that $\{x : f(x) = g(x)\}$ is a closed set.
- (b) Let $E \subset \mathbb{R}$ be a closed set. If $\{a_n\} \subset E$ converges to a , show that $a \in E$.
- (c) What is an equivalent way to say a set $A \subset \mathbb{R}$ is compact? If $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ is a continuous function on a compact set A , show that f is uniformly continuous on A .

[100 marks]

5. (a) *Apa yang dimaksudkan f fungsi nyata selanjat pada \mathbb{R} dalam sebutan set terbuka?*
Andaikan f selanjat pada \mathbb{R} .
- (i) Tunjukkan bahawa $\{x : f(x) > c\}$ ialah set terbuka untuk sebarang pemalar c .*
 - (ii) Jika fungsi g selanjat pada \mathbb{R} , tunjukkan bahawa $\{x : f(x) = g(x)\}$ ialah set tertutup.*
- (b) *Katakan $E \subset \mathbb{R}$ ialah set tertutup. Jika $\{a_n\} \subset E$ menumpu ke a , tunjukkan bahawa $a \in E$.*
- (c) *Apakah kenyataan setara untuk menyatakan set $A \subset \mathbb{R}$ ialah padat? Jika $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fungsi selanjat pada set padat A , tunjukkan bahawa f selanjat secara seragam pada A .*

[100 markah]

6. (a) (i) What is meant by a sequence of functions $\{f_n\}$ to converge uniformly to a function f on a set A ?
(ii) Let $\{f_n\}$ be a sequence defined by

$$f_n(x) = \frac{n}{1 + nx}, \quad x \in (0, \infty).$$

Show that f_n converges uniformly on $[1, \infty)$.

- (b) Consider the series $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.
(i) Show that f converges on $(-1, 1)$. What is its limit?
(ii) Show that f converges uniformly to $\frac{1}{1-x}$ on any interval $[-a, a]$, $0 < a < 1$.

[100 marks]

6. (a) (i) Apakah maksud jujukan fungsi $\{f_n\}$ menumpu secara seragam ke fungsi f pada set A ?
(ii) Andaikan $\{f_n\}$ jujukan yang ditakrifkan oleh

$$f_n(x) = \frac{n}{1 + nx}, \quad x \in (0, \infty).$$

Tunjukkan bahawa f_n menumpu secara seragam pada $[1, \infty)$.

- (b) Pertimbangkan siri $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.
(i) Tunjukkan bahawa f menumpu pada $(-1, 1)$. Apakah hadnya?
(ii) Tunjukkan bahawa f menumpu secara seragam ke $\frac{1}{1-x}$ pada sebarang selang $[-a, a]$, $0 < a < 1$.

[100 markah]