



UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
2016/2017 Academic Session

June 2017

MAT111 – Linear Algebra
[Aljabar Linear]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of NINE pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi SEMBILAN muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **FOUR** (4) questions.

[Arahan: Jawab **EMPAT** (4) soalan].

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai.]

1. (a) Consider the following system of equations.

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 - 6x_4 - 2x_5 &= 0 \\-2x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 2x_5 &= 0 \\-3x_1 + x_2 - 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 &= 0.\end{aligned}$$

- (i) Write the coefficient matrix, A of the system.
 - (ii) Solve the system using Gauss-Jordan elimination.
 - (iii) State the bases for the column space of A .
 - (iv) State the bases for the row space of A and its row rank.
 - (v) State the bases for the null space of A and its nullity.
 - (vi) State the relationship between the rank and the nullity of A .
- (b) Let A be a 2×2 matrix. A matrix A is called a *square root* of a 2×2 matrix B if $A^2 = B$.

- (i) Find a square root of $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
- (ii) Show that there is no square root of $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

- (c) Let A be a $n \times n$ invertible matrix.

- (i) Write the formula to find the inverse of A using its adjoint.
- (ii) Hence, use the formula in part (i) to prove that

$$\det(\text{adj}(A)) = \det(A)^{n-1}.$$

[100 marks]

1. (a) *Pertimbangkan sistem persamaan linear berikut.*

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 - 6x_4 - 2x_5 &= 0 \\-2x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 2x_5 &= 0 \\-3x_1 + x_2 - 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 &= 0.\end{aligned}$$

- (i) *Tuliskan matriks pekali A untuk sistem ini.*
- (ii) *Selesaikan sistem ini menggunakan kaedah Gauss-Jordan.*
- (iii) *Nyatakan asas bagi ruang lajur A .*
- (iv) *Nyatakan asas bagi ruang baris A dan pangkatnya.*
- (v) *Nyatakan asas bagi ruang nol A dan kenolannya.*
- (vi) *Nyatakan hubungan antara pangkat dan kenolan A .*

(b) *Biarkan A suatu matriks 2×2 . Matriks A dikatakan punca kuasa dua bagi matriks 2×2 , B jika $A^2 = B$.*

- (i) *Dapatkan punca kuasa dua bagi $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.*
- (ii) *Tunjukkan bahawa tidak ada punca kuasa dua bagi $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.*

(c) *Biarkan A suatu matriks $n \times n$ tersongsangkan.*

- (i) *Nyatakan rumus untuk mencari matriks songsang A menggunakan adjoinnya.*
- (ii) *Seterusnya, dengan menggunakan rumus dalam bahagian (i), buktikan bahawa*

$$\det(\text{adj}(A)) = \det(A)^{n-1}.$$

[100 markah]

2. (a) Let V be the set of pairs of positive real numbers and define the addition and scalar multiplication operations as follows:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1v_1, u_2v_2)$$
$$k\mathbf{u} = k(u_1, u_2) = (u_1^k, u_2^k).$$

Given that V is a vector space.

- (i) Determine the zero vector, $\mathbf{0}$ in V .
 - (ii) Verify that $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$ holds.
 - (iii) Let \mathbf{u} be (u_1, u_2) in V . Find $-\mathbf{u}$ such that $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.
 - (iv) Verify that $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$ holds.
- (b) Let S be the set of all 3×3 skew-symmetric matrices.
- (i) Give an example of an element in S .
 - (ii) Show that S is a subspace of M_{33} , a vector space of all 3×3 matrices with the standard operations.
 - (iii) Find a basis of S .
 - (iv) What is its dimension?
- (c) Prove that if $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ is a linearly independent set of vectors in some vector space V , then

$$\{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\}$$

is also a linearly independent set in V .

[100 marks]

2. (a) Biarkan V set yang mengandungi pasangan nombor nyata positif dengan operasi penambahan dan pendaraban skalar seperti berikut:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1v_1, u_2v_2)$$

$$k\mathbf{u} = k(u_1, u_2) = (u_1^k, u_2^k).$$

Diberikan bahawa V ialah ruang vektor.

- (i) Tentukan vektor sifar, $\mathbf{0}$ dalam V .
 - (ii) Tentusahkan bahawa $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$ adalah benar.
 - (iii) Biarkan \mathbf{u} be (u_1, u_2) dalam V . Dapatkan $-\mathbf{u}$ sedemikian $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.
 - (iv) Tentusahkan bahawa $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$ adalah benar.
- (b) Biarkan S set semua matriks simetri terpencong 3×3 .
- (i) Beri satu contoh unsur dalam S .
 - (ii) Tunjukkan bahawa S adalah subruang untuk ruang vektor M_{33} yang terdiri daripada semua matriks 3×3 , dengan operasi yang lazim.
 - (iii) Dapatkan asas untuk S .
 - (iv) Apakah dimensi subruang tersebut?
- (c) Buktikan bahawa jika $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ merupakan set tidak bersandar linear dalam suatu ruang vektor V , maka

$$\{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\}$$

juga merupakan set tidak bersandar linear dalam V .

[100 markah]

3. (a) Find the best least squares fit by a linear function to the data below.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 0 & 1 & 3 & 9 \end{array}$$

- (b) Let W be spanned by the vectors

$$\mathbf{v}_1 = (1, -1, 2), \quad \mathbf{v}_2 = (0, 1, 2), \quad \mathbf{v}_3 = (1, 2, -1).$$

- (i) Use the Gram-Schmidt process to determine an orthonormal basis of W with the Euclidean inner product defined on it.
- (ii) Find a basis of the orthogonal complement of W .

- (c) Consider the following transformation given by

$$T \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2x - y + z \\ x + 3z \\ x - y - 2z \end{bmatrix}.$$

- (i) Show that T is a linear transformation.
- (ii) Find the standard matrix for T .
- (iii) Find a basis for the kernel of T .
- (iv) Find a basis for the image of T .
- (v) Is T one to one. Why?
- (vi) Extend the basis in part (iv) to obtain a basis for \mathbb{R}^3 .

[100 marks]

3. (a) *Dapatkan penghampiran kuasa dua terkecil yang terbaik dengan fungsi linear yang memadankan data di bawah.*

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 0 & 1 & 3 & 9 \end{array}$$

- (b) *Biarkan W direntang oleh vektor-vektor*

$$\mathbf{v}_1 = (1, -1, 2), \quad \mathbf{v}_2 = (0, 1, 2), \quad \mathbf{v}_3 = (1, 2, -1).$$

- (i) *Tentukan asas ortonormal untuk W dengan menggunakan proses Gram-Schmidt dengan andaian hasil darab terkedalam Euclidean tertakrif.*

- (ii) *Dapatkan asas pelengkap berortogon untuk W .*

- (c) *Pertimbangkan transformasi yang diberi oleh*

$$T \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2x - y + z \\ x + 3z \\ x - y - 2z \end{bmatrix}.$$

- (i) *Tunjukkan bahawa T merupakan suatu transformasi linear.*

- (ii) *Dapatkan matriks piawai untuk T .*

- (iii) *Dapatkan asas untuk inti T .*

- (iv) *Dapatkan asas untuk imej T .*

- (v) *Adakah T satu dengan satu. Kenapa?*

- (vi) *Tambah asas dalam bahagian (iv) untuk mendapatkan asas bagi \mathbb{R}^3 .*

[100 markah]

4. (a) The characteristic polynomial of a diagonalizable matrix A is given by

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 2)^2(\lambda + 3)^2.$$

- (i) Find $\det(A^{-1})$.
- (ii) Find $\det(\frac{1}{2}A)$.
- (iii) What is the characteristic polynomial of the transpose of A ?
- (iv) Find the eigenvalues of A^4 .

(b) Let $A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -3 \\ -9 & -2 & 3 \\ 18 & 0 & -8 \end{bmatrix}$.

- (i) What is the characteristic equation of A ?
- (ii) Find the eigenvalues and also the bases for the corresponding eigenspaces of the matrix A .
- (iii) Find the invertible matrix P and the diagonal matrix D such that $P^{-1}AP = D$.
- (iv) Is P in part (iii) unique? Justify your answer.

[100 marks]

4. (a) *Polinomial cirian suatu matriks terpepenjurukan A diberi oleh*

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 2)^2(\lambda + 3)^2.$$

- (i) *Dapatkan $\det(A^{-1})$.*
- (ii) *Dapatkan $\det(\frac{1}{2}A)$.*
- (iii) *Apakah polinomial cirian untuk transposisi A ?*
- (iv) *Dapatkan semua nilai eigen untuk A^4 .*

(b) Biarkan $A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -3 \\ -9 & -2 & 3 \\ 18 & 0 & -8 \end{bmatrix}$.

- (i) *Apakah persamaan cirian untuk A ?*
- (ii) *Dapatkan semua nilai eigen dan asas-asas yang sepadan dengan ruang eigen bagi matriks A .*
- (iii) *Dapatkan matriks tersongsangkan P dan matriks pepenjuru D sedemikian $P^{-1}AP = D$.*
- (iv) *Adakah P dalam bahagian (iii) unik? Jelaskan jawapan anda.*

[100 markah]