UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
2016/2017 Academic Session

June 2017

MAA111 – Algebra for Science Students
[Aljabar untuk Pelajar Sains]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed material before you begin the examination.

[*Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.*]

Instructions: Answer **THREE** (3) questions.

*[**Arahan:** Jawab **TIGA** (3) soalan].*

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai.]

Question 1

(a) What condition must be placed on a, b and c so that the following system with independent variables x, y and z has a solution?

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & 3z & = & a \\ 2x & + & 6y & - & 11z & = & b \\ x & - & 2y & + & 7z & = & c \end{array}$$

[8 marks]

(b) Find an LU factorization of $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$; and what can you conclude on the solution of the linear system $A\vec{x} = \vec{b}$.

[10 marks]

(c) If A is a nonsingular matrix and $(5A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$; find A.

[8 marks]

(d) Given the following type of calculation to introduce a zero into a matrix:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_1 + 3R_2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

However, $-2R_1 + 3R_2$ is not an elementary row operation. Why? Show how to achieve the same result using elementary row operations.

[6 marks]

Soalan 1

(a) Apakah syarat bagi a, b dan c supaya sistem berkaitan yang mempunyai pembolehubah tak bersandar x, y dan z mempunyai penyelesaian?

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 3z & = & a \\ 2x & + & 6y & - & 11z & = & b \\ x & - & 2y & + & 7z & = & c \end{array}$$

[8 markah]

(b) Dapatkan pemfaktoran LU bagi matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$; apakah yang dapat disimpulkan tentang penyelesaian sistem linear $A\vec{x} = \vec{b}$ ini.

[10 markah]

(c) Jika A adalah matriks tak singular dan $(5A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$; dapatkan matriks A.

[8 markah]

(d) Diberikan pernyataan untuk dapatkat nilai sifar pada matriks:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_1 + 3R_2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Walaubagaimanapun, $-2R_1 + 3R_2$ bukannya suatu operasi asas baris. Kenapa? Tunjukkan bagaimana untuk dapatkan keputusan yang sama dengan menggunakan operasi-operasi asas baris.

[6 markah]

Question 2

(a) Find the dimension and a basis of the solution space of the homogeneous system:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 6x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 9x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array}$$

[10 marks]

(b) Determine whether the set of all vectors $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, where $y = x^2$, is a subspace of $\mathbb{R}^2$.

[6 marks]

(c) Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

(i) give bases for $row(A), col(A),$ and $null(A)$.

(ii) Find the rank and nullity of the given matrix A.

[14 marks]

(d) Given a transformation that rotates each point 90° counterclockwise about the origin. Show that this transformation is linear.

[6 marks]

Soalan 2

(a) Cari dimensi dan asas ruang penyelesaian bagi sistem homogen berikut:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 9x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

[10 markah]

(b) Tentukan bahawa set vektor $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, dimana $y = x^2$, adalah suatu subruang bagi $\mathbb{R}^2$.

[6 markah]

(c) Biar $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

(i) berikan asas-asas bagi for $baris(A), lajur(A),$ and $nol(A)$.

(ii) Dapatkan pangkat dan kenolan bagi matriks A.

[14 markah]

(d) Diberikan suatu transformasi yang memutarkan titik 90° ikut lawan arah jam dari titik asal. Tunjukkan bahawa transformasi ini adalah linear.

[6 markah]

Question 3

(a) Find the orthogonal projection of the vector $\vec{u} = (5,6,7,2)$ onto the solution space of the homogeneous linear system:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

[10 marks]

(b). Let $\mathbb{R}^3$ have the Euclidean inner product. Find an orthonormal basis for the subspace spanned by $(0,1,2),(-1,0,1),(-1,1,3)$.

[10 marks]

(c). Let $A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$,

(i) find the eigenvalues and corresponding eigenvectors,

(ii) for each eigenvalue λ, find the rank of the matrix $\lambda I - A$,

(iii) is A diagonalizable? Justify your answer.

[12 marks]

<u>Soalan 3</u>

(a) Dapatkan unjuran ortogonal bagi vektor $\vec{u}=(5,6,7,2)$ ke ruang penyelesaian sistem linear homogen berikut:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \quad &= 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

[10 markah]

(b) Biarkan $\mathbb{R}^3$ adalah hasil darab terkedalam Euclidean. Dapatkan asas ortonormal bagi subruang yang direntang oleh $(0,1,2),(-1,0,1),(-1,1,3)$.

[10 markah]

(c) Katakan $A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$,

(i) Dapatkan nilai eigen dan vektor eigen yang sepadan dengannya eigenvalues,

(ii) bagi setiap nilai eigen λ, dapatkan pangkat bagi matriks $\lambda I - A$,

(iii) adakah A terpepenjurukan? Berikan sebab bagi jawapan anda.

[12 markah]

- ooo 0 ooo -