
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
2015/2016 Academic Session

June 2016

MGM 502 – Number Theory
[Teori Nombor]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of SIX pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi ENAM muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **NINE** (9) questions.

[Arahan: Jawab **SEMBILAN** (9) soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai.]

1. Given the cubic equation $x^3 - 12x^2 + 9x + 110 = 0$.
- (i) Suggest a suitable value for α such that the substitution $x = y + \alpha$ would produce a cubic equation in y without the y^2 term.
 - (ii) Substitute $y = u + v$ into the equation obtained in (i) above to obtain an equation of degree three in the two variables u and v .
 - (iii) Using the substitution $uv = 13$ in the equation obtained in (ii) above, find the value of $u^3 + v^3$. Hence, obtain and solve the quadratic equation whose roots are u^3 and v^3 .
 - (iv) Find the cubes of both the complex number $3 + 2i$ and its conjugate. Hence, deduce the values of u and v from your final answer in (iii).
 - (v) Find all the roots of the given cubic equation in x .

[18 marks]

1. Diberikan persamaan kubik $x^3 - 12x^2 + 9x + 110 = 0$.
- (i) Cadangkan suatu nilai yang sesuai untuk α supaya gantian $x = y + \alpha$ menghasilkan persamaan kubik dalam y tanpa sebutan y^2 .
 - (ii) Gantikan $y = u + v$ ke dalam persamaan yang diperoleh di (i) di atas untuk memperoleh suatu persamaan berdarjah tiga dalam dua pemboleh ubah u and v .
 - (iii) Gunakan gantian $uv = 13$ di dalam persamaan yang diperoleh di (ii) di atas untuk mencari nilai bagi $u^3 + v^3$. Seterusnya, bentukkan dan selesaikan persamaan kuadratik yang punca-puncanya adalah u^3 dan v^3 .
 - (iv) Cari kuasa tiga bagi kedua-dua nombor kompleks $3 + 2i$ dan konjugatnya. Dengan demikian, deduksikan nilai-nilai bagi u dan v dari jawapan akhir anda di (iii).
 - (v) Cari semua punca bagi persamaan kubik dalam x yang diberi.

[18 markah]

2. (i) State Peano's Axioms, using α to denote the undefined symbol in your statement.
- (ii) State the definition of addition on \mathbb{Y} .
- (iii) Given that addition is associative on \mathbb{Y} and $x + \alpha = \alpha + x \quad \forall x \in \mathbb{Y}$, use (i) and (ii) to prove the commutative property of addition on \mathbb{Y} .

[10 marks]

2. (i) Nyatakan Aksiom Peano, dengan menggunakan simbol α untuk mewakili simbol yang tak tertakrif dalam pernyataan anda.
- (ii) Nyatakan takrifan penambahan atas \mathbb{Y} .
- (iii) Diberikan operasi penambahan merupakan kalis sekutuan atas \mathbb{Y} serta $x + \alpha = \alpha + x \quad \forall x \in \mathbb{Y}$, gunakan (i) dan (ii) untuk membuktikan sifat kalis tukar tertib bagi penambahan atas \mathbb{Y} .

[10 markah]

3. Find all integers x with $|x| < 100$ that satisfy the following system of linear congruences:

$$13x \equiv 1 \pmod{2}$$

$$3x \equiv 7 \pmod{5}$$

$$5x \equiv 11 \pmod{3}$$

[10 marks]

3. Cari semua nilai x dengan $|x| < 100$ yang memenuhi sistem kongruen linear berikut:

$$13x \equiv 1 \pmod{2}$$

$$3x \equiv 7 \pmod{5}$$

$$5x \equiv 11 \pmod{3}$$

[10 markah]

4. Given that $r, s \in \mathcal{C}$ such that $|r|$ and $|s|$ are both primes, find all values of r and s that satisfy the equation $r^2 = 3r + s + 8$.

[5 marks]

4. Diberikan $r, s \in \mathcal{C}$ sedemikian hingga $|r|$ dan $|s|$ kedua-duanya nombor perdana, cari semua nilai bagi r dan s yang dapat memenuhi persamaan $r^2 = 3r + s + 8$.

[5 markah]

5. Let p_1, p_2, p_3, \dots represent all the positive primes in increasing order and $P = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

- (i) State the values of p_1, p_2, p_3 and p_4 .
- (ii) Show that P is an infinite set.
- (iii) Find all primes $p \in P$ such that $p = p_i + p_{i+1} + p_{i+2} + p_{i+3}$ for some fixed i .
- (iv) Given $\hat{P} = \{p \in P \mid p = p_i + p_{i+1} + p_{i+2}\}$, find the three smallest elements in \hat{P} . Discuss without proof whether \hat{P} should be a finite or infinite set.

[13 marks]

5. Andaikan p_1, p_2, p_3, \dots mewakili semua nombor perdana positif dalam tertib menaik dan $P = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

- (i) Nyatakan nilai-nilai p_1, p_2, p_3 dan p_4 .
- (ii) Tunjukkan bahawa P merupakan set tak terhingga.
- (iii) Cari semua nombor perdana $p \in P$ supaya $p = p_i + p_{i+1} + p_{i+2} + p_{i+3}$ untuk suatu nilai tetap i .
- (iv) Diberikan $\hat{P} = \{p \in P \mid p = p_i + p_{i+1} + p_{i+2}\}$, cari tiga unsur terkecil dalam \hat{P} . Bincangkan tanpa bukti sama ada \hat{P} harus merupakan set terhingga atau tak terhingga.

[13 markah]

6. Prove or disprove the following statements:

- (a) The square of any odd integer has the form $8k + 1$ for some integer k .
- (b) The cube of any odd integer has the form $13k \pm 1$ for some integer k .

[10 marks]

6. *Sahkan atau sangkalkan pernyataan berikut:*

- (a) *Kuasa dua bagi sebarang integer ganjil berbentuk $8k + 1$ bagi sesuatu integer k .*
- (b) *Kuasa tiga bagi sebarang integer ganjil berbentuk $13k \pm 1$ bagi sesuatu integer k .*

[10 markah]

7. Given $a = 5822357$ and $b = 18877141$, find $\gcd(a, b)$ and write it in the form $\alpha a + \beta b$ for some integers α and β . Hence solve the Diophantine equation $ax + by = 12321$.

[12 marks]

7. *Diberikan $a = 5822357$ dan $b = 18877141$, cari $\gcd(a, b)$ dan tuliskannya dalam bentuk $\alpha a + \beta b$ bagi sesuatu integer α dan β . Dengan demikian selesaikan persamaan Diophantine $ax + by = 12321$.*

[12 markah]

8. (a) Find the number of positive factors of 12321 and the sum of all these factors.

- (b) Given $n = p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta$ where p, q, r, s are distinct primes and $\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$, find the smallest possible value of n if it has exactly 12321 positive factors.

[12 marks]

8. (a) Cari bilangan faktor positif bagi 12321 serta hasil tambah semua faktor ini.
- (b) Diberikan $n = p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta$, dengan p, q, r, s nombor perdana, dan $\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$, cari nilai terkecil mungkin bagi n sekiranya ia mempunyai tepat 12321 faktor positif.

[12 markah]

9. Given $a=135797531$ and $b=2468108642$.

- (i) Find the remainder obtained when a is divided by 7.
- (ii) Hence, find the remainder obtained when a^b is divided by 7.

[10 marks]

9. Diberikan $a=135797531$ dan $b=2468108642$.

- (i) Cari baki yang diperoleh apabila a dibahagi oleh 7.
- (ii) Dengan demikian, cari baki yang diperoleh apabila a^b dibahagi oleh 7.

[10 markah]