UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
2015/2016 Academic Session

June 2016

MAT 202 – Introduction to Analysis
[Pengantar Analisis]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed material before you begin the examination.

[*Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.*]

Instructions: Answer **THREE** (3) questions.

*[**Arahan:** Jawab **TIGA** (3) soalan].*

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai.]

1. (a) Let S be a subset of $\mathbb{R}$. Define what it means for S to be bounded above.

   (b) Let S be a subset of $\mathbb{R}$. Define what it means for $\alpha \in \mathbb{R}$ to be the least upper bound of S.

   (c) State the Completeness Axiom for the set real numbers.

   (d) Does the set of all rational numbers satisfy the Completeness Axiom? Justify your answer by giving an example.

   (e) Let $f : X \to Y$ be a function, with $X, Y \in \mathbb{R}$ and $A, B \subset X$. Show that $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

   (f) Define a countable set. Next determine whether the set $\{r \in \mathbb{Q} : |r| < \sqrt{2}\}$ is countable.

   (g) Let A be an infinite set. Show that A has a countably infinite subset.

[100 marks]

1. *(a)* *Biarkan S suatu subset pada $\mathbb{R}$. Takrifkan apa yang dimaksudkan dengan S dibatasi dari atas.*

   (b) *Biarkan S suatu subset pada $\mathbb{R}$. Takrifkan apa yang dimaksudkan dengan $\alpha \in \mathbb{R}$ sebagai batas atas terkecil bagi S.*

   (c) *Nyatakan Aksiom Kelengkapan bagi set semua nombor nyata.*

   (d) *Adakah set semua nombor nisbah memenuhi Aksiom Kelengkapan? Berikan jawapan anda dengan menunjukkan contoh.*

   (e) *Biarkan $f : X \to Y$ suatu fungsi, dengan $X, Y \in \mathbb{R}$ dan $A, B \subset X$. Tunjukkan bahawa $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.*

   (f) *Takrifkan set terbilangkan. Seterusnya, tentukan sama ada set $\{r \in \mathbb{Q} : |r| < \sqrt{2}\}$ adalah terbilangkan.*

   (g) *Biarkan A suatu set tidak terhingga. Tunjukkan bahawa A mempunyai satu subset yang terbilangkan secara tak terhingga.*

[100 markah]

2. (a) Let $\{a_n\}$ be a sequence. Give the definition for the sequence $\{a_n\}$ to converge to a number a. Next show that a is unique.

(b) Let $\{a_n\}$ be a convergent sequence.

(i) Show that $\{a_n\}$ is bounded. Is the converse true? If yes, prove it and if no, give a counter example.

(ii) Show that $\{a_n\}$ is Cauchy. Is the converse true? If yes, prove it and if no, give a counter example.

(c) Let A be a subset of $\mathbb{R}$. Define the following terminology:

(i) Interior point of A.

(ii) Limit point of A.

(iii) Isolated point of A.

(iv) Boundary point of A.

(d) Find for each type of point in (c) for the set $A = [-2,19) \cap \mathbb{Q}^C$.

(e) Determine whether the set $A = [-2,19) \cap \mathbb{Q}^C$ is closed or open.

(f) Let A be a subset of $\mathbb{R}$. If x is a limit point of A, then show that for each $\varepsilon > 0$, the $\varepsilon-$neighbourhood of x, that is, $N(x;\varepsilon)$ contains infinitely many elements of A. Next, what can you conclude about the set of limit points of A if A is finite?

[100 marks]

2. *(a)* *Biarkan* $\{a_n\}$ *suatu jujukan. Berikan takrif untuk jujukan* $\{a_n\}$ *menumpu kepada nombor* a. *Seterusnya, tunjukkan* a *adalah unik.*

(b) *Biarkan* $\{a_n\}$ *suatu jujukan yang menumpu.*

(i) *Tunjukkan bahawa* $\{a_n\}$ *adalah terbatas. Adakah akasnya benar? Jika ya, buktikan dan jika tidak, berikan satu contoh penyangkal.*

(ii) *Tunjukkan bahawa* $\{a_n\}$ *adalah Cauchy. Adakah akasnya benar? Jika ya, buktikan dan jika tidak, berikan satu contoh penyangkal.*

(c) *Biarkan* A *suatu subset pada* $\mathbb{R}$. *Takrifkan istilah yang berikut:*

(i) *Titik pedalaman bagi* A.

(ii) *Titik had bagi* A.

(iii) *Titik terpencil bagi* A.

(iv) *Titik sempadan bagi* A.

(d) *Cari setiap jenis titik di bahagian (c) untuk set* $A = [-2,19) \cap \mathbb{Q}^C$.

(e) *Tentukan sama ada set* $A = [-2,19) \cap \mathbb{Q}^C$ *adalah tertutup atau terbuka.*

(f) *Biarkan* A *suatu subset pada* $\mathbb{R}$. *Jika* x *adalah titik had bagi* A, *maka tunjukkan bahawa untuk setiap* $\varepsilon > 0$, *jiranan* $-\ \varepsilon$ *bagi* x, *iaitu* $N(x;\varepsilon)$, *mengandungi tak terhingga banyaknya unsur* A. *Seterusnya, apa yang dapat dirumuskan jika set* A *adalah terhingga?*

[100 markah]

3. (a) State the Heine-Borel Theorem for $\mathbb{R}$. Give an example of a compact set.

(b) Let A and B be two compact sets. Show that $A \cup B$ is compact.

(c) Let f be a continuous real-valued function on $A \subseteq \mathbb{R}$ and g be a continuous function on $B \subseteq \mathbb{R}$, where $f(A) \subseteq B$. From the definition of continuity, prove that $g \circ f$ is continuous on A.

(d) State the definition for the uniform continuity of a real-valued function. Let $f(x) = x^2$. Using the definition, show that f is uniformly continuous on the interval $[0,2]$.

(e) Consider the sequence $\{f_n\}$ defined by $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ and $x \in [0,\ 1]$. Show that $\{f_n\}$ converges uniformly on $[0,\ a]$ for any number $0 \le a < 1$ but $\{f_n\}$ does not converge uniformly on $[0,\ 1]$.

[100 marks]

3. (a) *Nyatakan Teorem Heine-Borel bagi* $\mathbb{R}$. *Berikan satu contoh set padat.*

(b) *Biarkan* A, *dan* B *dua set padat. Tunjukkan bahawa* $A \cup B$ *adalah padat.*

(c) *Biarkan* f *suatu fungsi nyata pada* $A \subseteq \mathbb{R}$ *dan* g *adalah fungsi selanjar pada* $B \subseteq \mathbb{R}$, *yang mana* $f(A) \subseteq B$. *Dengan menggunakan takrif untuk keselanjaran, buktikan bahawa* $g \circ f$ *adalah selanjar pada* A.

(d) *Nyatakan takrif untuk keselanjaran secara seragam bagi suatu fungsi bernilai nyata. Biarkan* $f(x) = x^2$. *Dengan menggunakan takrifan, tunjukkan bahawa* f *adalah selanjar secara seragam pada selang* $[0,2]$.

(e) *Pertimbangkan jujukan* $\{f_n\}$ *yang ditakrifkan oleh* $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ *dan* $x \in [0,\ 1]$. *Tunjukkan bahawa* $\{f_n\}$ *menumpu secara serangan pada* $[0,\ a]$ *untuk sebarang nombor* $0 \leq a < 1$ *tetapi* $\{f_n\}$ *tak menumpu secara seragam pada* $[0,\ 1]$.

[100 markah]

- ooo 0 ooo -