

---

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination  
2015/2016 Academic Session

June 2016

**MAA111 – Algebra for Science Students**  
***[Aljabar untuk Pelajar Sains]***

Duration : 3 hours  
*[Masa : 3 jam]*

---

Please check that this examination paper consists of SIX pages of printed material before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi ENAM muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

**Instructions:** Answer **FIVE** (5) questions.

**Arahan:** Jawab **LIMA** (5) soalan].

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

*[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai.]*

1. (a) Let  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  and  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ .

Find (i)  $AB$ .

(ii)  $BA$ .

(b) Find the values of  $x, y, z, t$  where

$$3 \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+t & 3 \end{pmatrix}.$$

(c) If  $B$  is a nonsingular matrix whose inverse is  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ , find  $B$ .

Hence, solve the linear system  $B^T x = b$  given  $b = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

[ 20 marks ]

1. (a) Biarkan  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  dan  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ .

Dapatkan (i)  $AB$ .

(ii)  $BA$ .

(b) Dapatkan nilai-nilai  $x, y, z, t$  yang mana

$$3 \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+t & 3 \end{pmatrix}.$$

(c) Jika  $B$  suatu matriks tak singular yang songsangannya adalah  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ ,

dapatkan  $B$ . Seterusnya, selesaikan sistem linear  $B^T x = b$  diberi  $b = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

[20 markah]

...3/-

2. (a) Determine the values of  $a$  so that the following system in unknowns  $x$ ,  $y$ , and  $z$  has:

- (i) no solution.  
(ii) infinitely many solutions.  
(iii) a unique solution.

$$\begin{aligned}x + y - z &= 1 \\2x + 3y + az &= 3 . \\x + ay + 3z &= 2\end{aligned}$$

- (b) Let  $W = \{(a, b, -a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

- (i) Show that  $W$  is a subspace of  $\mathbb{R}^3$ .  
(ii) Find a basis for  $W$ .  
(iii) Use Gram-Schmidt process to obtain an orthonormal basis for  $W$ .

[ 20 marks ]

2. (a) Tentukan nilai-nilai  $a$  supaya sistem berikut dalam  $x$ ,  $y$ , dan  $z$  mempunyai:

- (i) tiada penyelesaian.  
(ii) penyelesaian tak terhingga banyaknya.  
(iii) penyelesaian unik.

$$\begin{aligned}x + y - z &= 1 \\2x + 3y + az &= 3 . \\x + ay + 3z &= 2\end{aligned}$$

- (b) Biarkan  $W = \{(a, b, -a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

- (i) Tunjukkan bahawa  $W$  adalah suatu subruang bagi  $\mathbb{R}^3$ .  
(ii) Dapatkan asas bagi  $W$ .  
(iii) Gunakan proses Gram-Schmidt untuk mendapatkan asas orthonormal bagi  $W$ .

[20 markah]  
...4/-

3. (a) Let  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ .

Find:

(i)  $|A|$ .

(ii)  $\text{adj}(A)$ .

(iii)  $A^{-1}$  using  $\text{adj}(A)$ .

(b) Solve using determinants:

$$3y + 2x = z + 1$$

$$3x + 2z = 8 - 5y .$$

$$3z - 1 = x - 2y$$

[ 20 marks ]

3. (a) Biarkan  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ .

Dapatkan:

(i)  $|A|$ .

(ii)  $\text{adj}(A)$ .

(iii)  $A^{-1}$  dengan menggunakan  $\text{adj}(A)$ .

(b) Selesaikan menggunakan penentu:

$$3y + 2x = z + 1$$

$$3x + 2z = 8 - 5y .$$

$$3z - 1 = x - 2y$$

[20 markah]

4. (a) Let  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  be defined by  $f(x, y) = (x, -y)$ .
- (i) Find the matrix representation of  $f$  with respect to the usual basis  $S$  for  $\mathbb{R}^2$ .
- (ii) Find the matrix representation of  $f$  with respect to the ordered basis
- $$T = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$
- (iii) Verify that the matrices obtained in (i) and (ii) are similar.
- (iv) Verify that the ranks of the matrices obtained in (i) and (ii) are equal.
- (b) If  $A$  and  $B$  are similar matrices, then show that  $A^k$  and  $B^k$  are similar matrices for any positive integer  $k$ .

[ 20 marks ]

4. (a) Biarkan  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ditakrifkan sebagai  $f(x, y) = (x, -y)$ .
- (i) Dapatkan matriks perwakilan bagi  $f$  terhadap asas piawai  $S$  bagi  $\mathbb{R}^2$ .
- (ii) Dapatkan matriks perwakilan bagi  $f$  terhadap asas bertertib
- $$T = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$
- (iii) Tentusahkan bahawa matriks-matriks yang diperolehi dalam (i) dan (ii) adalah serupa.
- (iv) Tentusahkan bahawa pangkat matriks-matriks yang diperolehi dalam (i) dan (ii) adalah sama.
- (b) Jika  $A$  dan  $B$  adalah matriks-matriks yang serupa, maka tunjukkan bahawa  $A^k$  dan  $B^k$  adalah serupa bagi sebarang integer positif  $k$ .

[20 markah]

5. Let

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 4 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Find the eigenvalues and eigenvectors of  $A$ .
- (b) (i) Find a nonsingular matrix  $P$  such that  $P^{-1}AP$  is diagonal.  
(ii) Is  $P$  unique? Explain.
- (c) Compute  $A^{20}$ .
- (d) Find the eigenvalues for  $A^{-1}$ .

[ 20 marks ]

5. *Biarkan*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 4 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) *Dapatkan nilai eigen dan vektor eigen bagi  $A$ .*
- (b) (i) *Dapatkan matriks tak singular  $P$  sedemikian  $P^{-1}AP$  adalah pepenjuru.*  
(ii) *Adakah  $P$  unik? Jelaskan*
- (c) *Hitung  $A^{20}$ .*
- (d) *Dapatkan nilai eigen-nilai eigen bagi  $A^{-1}$ .*

[ 20 markah ]