UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination
2016/2017 Academic Session

December 2016 / January 2017

MSS 212 - Further Linear Algebra
[Aljabar Linear Lanjutan]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of SIX pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi ENAM muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all six** [6] questions.

*[Arahan: Jawab **semua enam** [6] soalan.]*

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai.]

1. (a) By using the definition of determinant by permutation, show that for an $n \times n$ matrix A, the determinants for A and its transpose A^T are the same.
   (b) Find the value of the determinant of the following 3×3 Vandermonde matrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}.$$

[10 marks]

1. (a) Dengan menggunakan takrif penentu melalui pilihatur, tunjukkan bahawa untuk suatu matriks $n \times n$ A, penentu untuk A dan tranposisinya A^T adalah sama.
   (b) Cari nilai penentu untuk matriks Vandermonde 3×3 berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}.$$

[10 markah]

2. Let V be a finite dimensional vector space over a field $\mathbb{F}$.

   (a) Show that the additive identity for V is unique.
   (b) If $\underline{0}$ is the additive identity for V, show that $k \cdot \underline{0} = \underline{0}$ for all $k \in \mathbb{F}$.

[10 marks]

2. *Andaikan V suatu ruang vektor terhadap medan $\mathbb{F}$ yang berdimensi terhingga.*

   (a) Tunjukkan bahawa identiti terhadap penambahan untuk V adalah unik.
   (b) Jika $\underline{0}$ ialah identiti terhadap penambahan untuk V, tunjukkan bahawa $k \cdot \underline{0} = \underline{0}$ bagi semua $k \in \mathbb{F}$.

[10 markah]

3. (a) Let $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ be a linear tranformation given by

$$T(x, y, z) = (x + y, y + z).$$

If $\mathfrak{A} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ and $\mathfrak{B} = \{(1, 1), (1, 0)\}$ are the ordered bases for $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{R}^2$, respectively, then for any v in $\mathbb{R}^3$, find

(i) the matrix $T_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}$, (ii) the vector $(T(v))_{\mathfrak{B}}$.

Hence, deduce the vector $T_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}\, v_{\mathfrak{A}}$.

(b) Construct an isomorphism to show that $\mathbb{C}^4$ and $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ are isomorphic over the field $\mathbb{C}$.

[20 marks]

3. *(a) Andaikan $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ satu transformasi linear yang ditakrifkan oleh*

$$T(x, y, z) = (x + y, y + z).$$

Jika $\mathfrak{A} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ dan $\mathfrak{B} = \{(1, 1), (1, 0)\}$ ialah asas-asas bertertib untuk $\mathbb{R}^3$ dan $\mathbb{R}^2$ masing-masing, maka untuk sebarang v dalam $\mathbb{R}^3$, cari

(i) matriks $T_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}$, *$(ii)$ vektor $(T(v))_{\mathfrak{B}}$.*

Dengan itu, deduksikan vektor $T_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}\, v_{\mathfrak{A}}$.

(b) Berikan satu isomorfisma untuk menunjukkan bahawa $\mathbb{C}^4$ dan $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ adalah berisomorfik terhadap medan $\mathbb{C}$.

[20 markah]

4. (a) Let $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Show that the characteristic polynomial $p(\lambda)$ of A is given by

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A) + \det(A),$$

where $\operatorname{tr}(A)$ and $\det(A)$ denote the trace and the determinant of A, respectively.

(b) Consider $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(i) Find all the eigenvalues of A.
(ii) Find the bases of the eigenspaces of A corresponding to all the eigenvalues obtained in part (i).
(iii) Find a nonsingular matrix P and a diagonal matrix D such that $A = PDP^{-1}$.

[25 marks]

4. (a) Andaikan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. *Tunjukkan bahawa polinomial cirian* $p(\lambda)$ *untuk* A *diberikan oleh*

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A) + \det(A),$$

yang mana $\operatorname{tr}(A)$ *dan* $\det(A)$ *masing-masing menandakan surihan dan penentu bagi* A.

(b) Pertimbangkan $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(i) Cari semua nilai eigen untuk A.
(ii) Cari asas-asas untuk ruang-ruang eigen bagi A *bersepadan dengan semua nilai eigen yang diperoleh di bahagian (i).*
(iii) Cari satu matriks tak singular P *dan satu matriks pepenjuru* D *sedemikian hingga* $A = PDP^{-1}$.

[25 markah]

5. (a) Consider the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(i) Find all the eigenvalues of A.
(ii) Find the rank of $A - \lambda I$ for each eigenvalue λ in part (i).
(iii) Find the Jordan canonical form of A. Justify your answer.

(b) A linear transformation $T : V \to V$ is called a *projection* if $T^2 = T$. Show that each of the eigenvalue of a projection T is either 0 or 1.

[25 marks]

5. *(a) Pertimbangkan matriks*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(i) Cari semua nilai eigen untuk A.
(ii) Cari pangkat untuk $A - \lambda I$ bagi setiap nilai eigen λ dalam bahagian (i).
(iii) Cari bentuk berkanun Jordan untuk A. Beri justifikasi anda.

(b) Suatu transformasi linear $T : V \to V$ disebut sebagai unjuran jika $T^2 = T$. Tunjukkan bahawa setiap nilai eigen untuk suatu unjuran T ialah 0 atau 1.

[25 markah]

6. (a) Let V be an inner product space. For any nonempty subset S of V, show that
$$S \cap S^{\perp} = \{\underline{0}\},$$
where $S^{\perp}$ is the orthogonal complement of S.

(b) Let $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ be a linear transformation given by
$$T(x, y) = (x + 3y, 2x + y).$$
Find the adjoint T^* of T.

[10 marks]

6. (a) Andaikan V suatu ruang hasil darab terkedalam. Untuk sebarang subset tak kosong S daripada V, tunjukkan bahawa
$$S \cap S^{\perp} = \{\underline{0}\},$$
yang mana $S^{\perp}$ ialah pelengkap ortogon untuk S.

(b) Andaikan $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ suatu transformasi linear yang diberikan oleh
$$T(x, y) = (x + 3y, 2x + y).$$
Cari adjoin T^* untuk T.

[10 markah]

- ooo O ooo -