
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
2014/2015 Academic Session

June 2015

CPT112 – Discrete Structures
[Struktur Diskret]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

INSTRUCTIONS TO CANDIDATE:

[ARAHAN KEPADA CALON:]

- Please ensure that this examination paper contains **FOUR** questions in **ELEVEN** printed pages before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **EMPAT** soalan di dalam **SEBELAS** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

- Answer **ALL** questions.

*[Jawab **SEMUA** soalan.]*

- You may answer the questions either in English or in Bahasa Malaysia.

[Anda dibenarkan menjawab soalan sama ada dalam bahasa Inggeris atau bahasa Malaysia.]

- In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai.]

1. (a) There are 3 questions on Discrete Mathematics. There are 155 students in the class, and each student answered at least one question. 130 students answered the first question, 110 answered the second question and 80 students answered the third question. Only 10 students answered all three questions, while 145 students answered any two questions.

(i) Draw the Venn diagram that can represent this situation.

(20/100)

(ii) How many students answered only the second question?

(20/100)

- (b) Given the following pseudo code:

```

FUNCTION Foo(n)
  n: positive integer

BEGIN
  IF (n = 1) THEN
    Return (3)
  ELSE
    Return (Foo(n-1) + 5)
END

```

(i) Find the implicit formula for the sequence $S[n]$ where $S_i = \text{Foo}(i)$.

(10/100)

(ii) Find the explicit formula for the sequence $S[n]$ where $S_i = \text{Foo}(i)$.

(10/100)

- (c) In a football league there are 4 clubs (club A, club B, club C, club D) competing.

(ii) If each club competing has 20 players (4 strikers, 8 midfielders, 8 defenders), how many ways are there to choose a national team of 15 players from three clubs if the 15 players consist of 4 strikers, 5 midfielders and 6 defenders?

(10/100)

(ii) A club has brought 10 balls to a field. The club buys balls from only 3 well-known ball manufacturers. How many combinations of 10 balls are there that can be brought to the field?

(20/100)

- (iii) Between club A and club B, club A has twice the chance to be a winner. Between club B and club C, club B has three times chance to be a winner. Club C and club D has the same chance to be a winner. What are the chances for each club to be a winner?

(10/100)

2. (a) Show that if n is a positive integer, then $1^2 + 3^2 + 5^2 \dots + (2n + 1)^2 = (n+1)(2n+1)(2n+3)/3$.

(35/100)

- (b) Let S_n be the proposition that $2^n < n!$ for every integer $n \geq 4$. By using mathematical induction, prove:

$$2^n < n! \text{ for every integer } n \text{ with } n \geq 4$$

(35/100)

- (c) Describe and write a recursive algorithm for computing $n!$ where n is a non-negative integer.

(30/100)

3. (a) Let A be the set $\{1, 2, 3, 4\}$. Relations R , S , and T on A are defined as follows:

$$\begin{aligned} R &= \{ (0,0), (0,1), (0,3), (1,0), (1,1), (2,2), (3,0), (3,3) \}, \\ S &= \{ (0,0), (0,2), (0,3), (2,3) \}, \\ T &= \{ (0,1), (2,3) \}. \end{aligned}$$

For **each** of the relations:

- (i) Draw the directed graph.

(15/100)

- (ii) Determine and explain whether the relation is reflexive, symmetric or transitive.

(30/100)

- (b) An automobile assembly plant project requires 9 tasks to be carried out. The given table shows the order in which tasks can be performed and the time required to perform each task:

Task	Immediate preceding task(s)	Time required to perform task (hour)
1	-	5
2	1	4
3	1	1
4	2	4
5	2,3	3
6	4	1
7	2,3	3
8	4,5	2
9	6,7,8	5

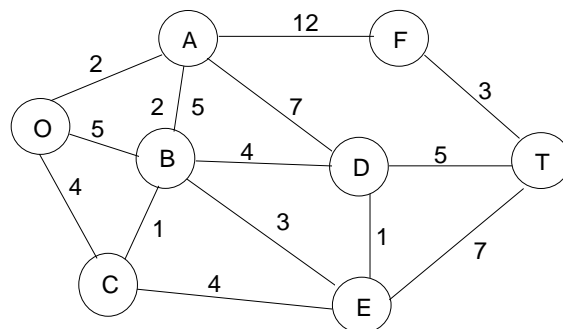
- (i) Draw the Hasse diagram for this project.

(10/100)

- (ii) How long does it take to complete the project? (Assume there is no constraint on human resources but one person should do each task.)

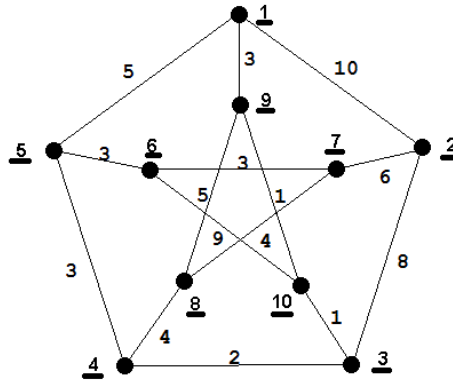
(10/100)

- (c) Use Dijkstra's algorithm to find the shortest path length from O to T in the following weighted graph. Show your work.



(35/100)

4. (a) Based on the following graph, please answer the questions. When visiting the nodes, please visit the nodes in increasing order (based on the nodes' labels).



- (i) Draw the tree resulting from a Depth First Search. (10/100)
- (ii) Draw the tree resulting from a Breath First Search. (10/100)
- (iii) Draw the minimum spanning tree resulting from Prim's algorithm. (10/100)
- (iv) Draw the minimum spanning tree resulting from Kruskal's algorithm. (10/100)

- (b) A language is defined by using the BNF notation as follows. Note that the starting state is 'A':

$$\begin{aligned}
 A &::= 1 \langle B \rangle \mid 0 \langle C \rangle \mid 0 \\
 B &::= 0 \langle C \rangle \mid 1 \langle C \rangle \mid 0 \mid 1 \\
 C &::= 1 \langle C \rangle \mid 0 \langle C \rangle \mid 0 \mid 1
 \end{aligned}$$

- (i) Draw the finite state machine based on the BNF notation above. (20/100)
- (ii) Write the phrase structure grammar, $G = (V, T, S, P)$, as defined by the BNF notation above. (10/100)

(c) L is a language that consists of all the binary strings with an odd number of digit "1".

(i) Write the simplest grammar for L in a Finite State Machine format.

(20/100)

(ii) Write the simplest grammar for L in a Phase Structure Grammar format.

(5/100)

(iii) Write the simplest grammar for L in a BNF notation.

(5/100)

KERTAS SOALAN DALAM VERSI BAHASA MALAYSIA

[CPT112]

- 7 -

1. (a) Terdapat 3 soalan Matematik Diskret. Terdapat 155 orang pelajar dalam kelas, dan setiap pelajar sekurang-kurangnya telah menjawab satu soalan. 130 orang pelajar telah menjawab soalan pertama, 110 orang pelajar telah menjawab soalan kedua dan 80 orang pelajar telah menjawab soalan ketiga. Hanya 10 orang pelajar telah menjawab ketiga-tiga soalan, manakala 145 orang pelajar telah menjawab mana-mana dua soalan.
- (i) Lukiskan gambar rajah Venn yang boleh mewakili keadaan ini.
(20/100)
- (ii) Berapa ramaikah pelajar yang menjawab soalan kedua sahaja?
(20/100)
- (b) Diberi pseudokod berikut:
- ```
FUNCTION Foo(n)
 n: positive integer

BEGIN
 IF (n = 1) THEN
 Return (3)
 ELSE
 Return (Foo(n-1) + 5)
END
```
- (i) Cari formula yang tersirat untuk urutan  $S[n]$  di mana  $S_i = \text{Foo}(i)$ .  
(10/100)
- (ii) Cari formula yang tersurat untuk urutan  $S[n]$  di mana  $S_i = \text{Foo}(i)$ .  
(10/100)
- (c) Dalam satu liga bola sepak terdapat 4 kelab (kelab A, kelab B, kelab C, kelab D) yang bersaing.
- (i) Jika setiap kelab yang bertanding mempunyai 20 pemain (4 pemain penyerang, 8 pemain tengah, 8 pemain pertahanan), berapa banyakkah cara yang ada untuk memilih satu pasukan kebangsaan yang terdiri daripada 15 pemain dari 3 kelab jika 15 pemain tersebut terdiri daripada 4 pemain penyerang, 5 pemain tengah dan 6 pemain pertahanan?  
(10/100)

- (ii) Sebuah kelab telah membawa 10 bola ke padang. Kelab itu telah membeli bola hanya dari 3 pengeluaran bola terkemuka. Berapa banyakkah kombinasi 10 bola yang boleh dibawa ke padang?

(20/100)

- (iii) Antara kelab A dan kelab B, kelab A mempunyai dua kali ganda peluang untuk menjadi pemenang. Antara kelab B dan kelab C, kelab B mempunyai tiga kali ganda peluang untuk menjadi pemenang. Kelab C dan kelab D mempunyai peluang yang sama untuk menjadi pemenang. Apakah peluang setiap kelab untuk menjadi pemenang?

(10/100)

2. (a) Tunjukkan bahawa jika  $n$  ialah integer positive, maka  $1^2 + 3^2 + 5^2 \dots + (2n + 1)^2 = (n+1)(2n+1)(2n+3)/3$ .

(35/100)

- (b) Diberi  $S_n = 2^n < n!$  benar bagi setiap integer  $n \geq 4$ . Dengan menggunakan induksi matematik, buktikan:

$$2^n < n! \text{ bagi setiap integer } n \geq 4$$

(35/100)

- (c) Huraikan dan tulis algoritma rekursif untuk mengira  $n!$  di mana  $n$  merupakan integer bukan-negatif.

(30/100)

3. (a) Biar A ialah set  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Hubungan R, S, dan T pada A adalah ditakrifkan seperti berikut:

$$\begin{aligned} R &= \{ (0,0), (0,1), (0,3), (1,0), (1,1), (2,2), (3,0), (3,3) \}, \\ S &= \{ (0,0), (0,2), (0,3), (2,3) \}, \\ T &= \{ (0,1), (2,3) \}. \end{aligned}$$

Bagi **setiap** hubungan:

- (i) Lukis graf berarah.

(15/100)

- (ii) Tentukan dan jelaskan sama ada hubungan adalah refleksif, simetri atau transitif.

(30/100)



- (b) Sebuah projek kilang pemasangan automobil memerlukan 9 tugas yang akan dijalankan. Jadual yang diberikan menunjukkan tertib tugas yang boleh dilaksanakan dan masa yang diperlukan untuk melaksanakan setiap tugas:

| Tugas | Tugas(-tugas) sebelum terdekat | Masa yang diperlukan untuk setiap tugas (jam) |
|-------|--------------------------------|-----------------------------------------------|
| 1     | -                              | 5                                             |
| 2     | 1                              | 4                                             |
| 3     | 1                              | 1                                             |
| 4     | 2                              | 4                                             |
| 5     | 2,3                            | 3                                             |
| 6     | 4                              | 1                                             |
| 7     | 2,3                            | 3                                             |
| 8     | 4,5                            | 2                                             |
| 9     | 6,7,8                          | 5                                             |

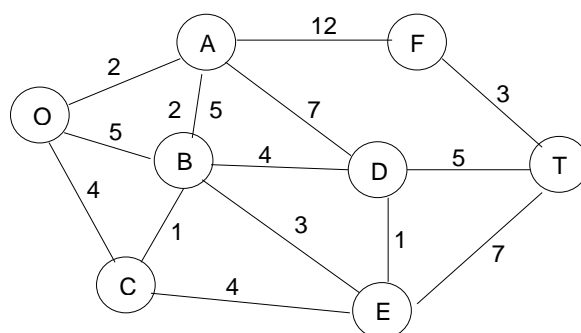
- (i) Lukiskan gambar rajah Hasse untuk projek ini.

(10/100)

- (ii) Berapa lamakah masa yang diperlukan bagi menyelesaikan projek ini? (Anggapkan tiada kekangan sumber manusia tetapi satu orang perlu melakukan setiap tugas).

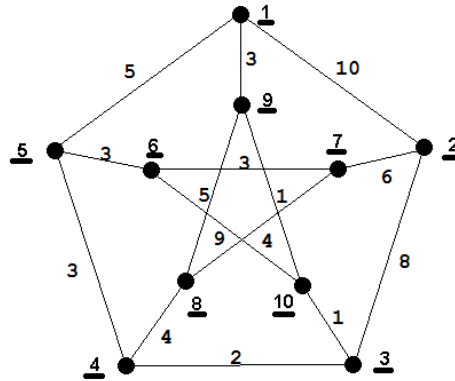
(10/100)

- (c) Gunakan algoritma Dijkstra untuk mencari panjang laluan terpendek dari O ke T dalam graf pemberat berikut. Tunjukkan jalan kerja anda.



(35/100)

4. (a) Berdasarkan graf berikut, sila jawab soalan. Ketika melawat nod, sila lawati nod-nod dalam urutan menaik (berdasarkan label nod).



- (i) Lukis pohon yang terhasil daripada algoritma *Depth First Search*.  
(10/100)
- (ii) Lukis pohon yang terhasil daripada algoritma *Breath First Search*.  
(10/100)
- (iii) Lukis pohon rentang minimum yang terhasil daripada algoritma Prim.  
(10/100)
- (iv) Lukis pohon rentang minimum yang terhasil daripada algoritma Kruskal.  
(10/100)
- (b) Suatu bahasa didefinisikan dengan menggunakan notasi BNF seperti di bawah. Perhatikan bahawa keadaan permulaan adalah keadaan 'A':

$$\begin{aligned} A &::= 1 \langle B \rangle \mid 0 \langle C \rangle \mid 0 \\ B &::= 0 \langle C \rangle \mid 1 \langle C \rangle \mid 0 \mid 1 \\ C &::= 1 \langle C \rangle \mid 0 \langle C \rangle \mid 0 \mid 1 \end{aligned}$$

- (i) Lukis sebuah mesin keadaan terhingga berdasarkan notasi BNF di atas.  
(20/100)
- (iii) Dapatkan tatabahasa struktur frasa  $G = (V, T, S, P)$  seperti yang didefinisikan oleh notasi BNF di atas.  
(10/100)

(c)  $L$  adalah bahasa yang terdiri daripada semua rentetan perdua dengan bilangan ganjil angka "1".

(i) Tulis tatabahasa termudah bagi  $L$  menggunakan format Mesin Keadaan Terhingga.

(20/100)

(ii) Tulis tatabahasa termudah bagi  $L$  menggunakan format Nahu Struktur Fasa.

(5/100)

(iii) Tulis tatabahasa termudah bagi  $L$  menggunakan format tatatanda BNF.

(5/100)