UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 2002/2003

April/Mei 2003

JIM 418 – Aljabar Moden

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan.

Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.

Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.

Setiap soalan bernilai 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan di penghujung subsoalan itu.

1. (a) Katakan A, B dan C adalah set yang tak kosong. Buktikan bahawa

(i) $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$.

(ii) $(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A)=(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)$.

(40 markah)

(b) Katakan A, B dan C tiga set yang tidak kosong dan $f:A\to B,\ g:B\to C$ ialah dua fungsi.

Buktikan bahawa

(i) Jika f dan g satu-ke-satu, maka fog adalah satu-ke-satu.

(ii) Jika f dan g keseluruh, maka fog adalah keseluruh.

(30 markah)

(c) Katakan $\mathbb{R}$ set semua nombor nyata, f adalah fungsi dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$ dan $(x)f = 2x + 2$. Cari fungsi g dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$ supaya $[(x)g]f = x + 1$. Adakah g satu-ke-satu atau keseluruh?

(30 markah)

2. (a) Katakan $G=\left\{\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \middle| a\in\mathbb{R} \text{ dan } a\neq 0\right\}$ dan X ialah pendaraban matriks.

Tentukan sama ada operasi X.

(i) suatu operasi dedua atas G.

(ii) kalis sekutuan.

(iii) kalis tukar tertib atau tidak.

Cari identiti bagi X dan songsangan bagi $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}\in G$.

(50 markah)

(b) Katakan $\langle G,*\rangle$ suatu kumpulan, $a,b \in G$ dan e adalah identiti.
Jika $a*b = b^2 * a,\ a^3 = e,\ b^3 = e,$ buktikan bahawa $(a*b)^3 = b^2$.

(15 markah)

(c) Jika $\{a,b,c\}$ dengan operasi $*$ adalah suatu kumpulan dan a ialah unsur identiti, cari sifir Cayley bagi kumpulan ini.

(15 markah)

(d) Katakan $\langle G,*\rangle$ suatu kumpulan dan $a \in G$. Buktikan bahawa $(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$ bagi semua integer positif n.

(20 markah)

3. (a) Buktikan $\langle A_n, o\rangle$ ialah suatu kumpulan.

(20 markah)

(b) Katakan $\mathbb{R}$ set semua nombor nyata. Tentukan sama ada setiap subset yang berikut merupakan subkumpulan bagi $\langle \mathbb{R},+\rangle$ atau tidak.

(i) Set semua integer genap.

(ii) Set semua integer ganjil.

(30 markah)

(c) Katakan dua pilihatur diberi seperti berikut:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Cari

(i) $\alpha\beta$.

(ii) peringkat bagi α.

(iii) peringkat bagi α^{23}.

(iv) Tentukan sama ada α genap atau ganjil.

(30 markah)

(d) Buktikan bahawa persilangan dua subkumpulan bagi suatu kumpulan $\langle G,*\rangle$ adalah suatu kumpulan bagi G.

(20 markah)

4. (a) Berikan takrif bagi homomorfisma bagi kumpulan. Jika $\mathbb{Z}$ adalah set semua integer, tentukan sama ada setiap fungsi yang berikut adalah homomorfisma dari $\langle Z,+\rangle$ ke $\langle \mathbb{Z},+\rangle$ atau tidak.

(i) $(x)f = x^2$.

(ii) $(x)g = (-1)^x$.

(iii) $(x)h = 3x$.

(30 markah)

(b) Katakan $\langle G,*\rangle$ suatu kumpulan dan f adalah fungsi dari G ke G ditakrifkan dengan $(x)f = x^2, \forall x \in G$. Buktikan bahawa G adalah abelan jika f adalah suatu homomorfisma dari G ke G.

(20 markah)

(c) Katakan $G=\{a,a^2,a^3,a^4,a^5,a^6=e\}$ suatu kumpulan kitaran yang berperingkat 6. Cari semua automorfisma atas G.

(30 markah)

(d) Katakan $\langle G,o\rangle,\langle H,*\rangle,\langle K,\otimes\rangle$ adalah kumpulan dan $f:G\to H, g:H\to K$ adalah isomorfisma. Buktikan bahawa fog: $G\to K$ adalah isomorfisma.

(20 markah)

5. (a) Katakan $H=\{e, (1\ \ 3)\}$. Cari semua koset kanan bagi H dalam S_3.

(30 markah)

(b) Katakan $M=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a\end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{R}\right\}$ dan +, x ialah masing-masing penambahan dan pendaraban matriks.

(i) Tunjukkan $\langle M,+,\times\rangle$ adalah suatu gelanggang.

(ii) Tentukan sama ada gelanggang itu ialah suatu domain integer atau tidak.

(40 markah)

(c) Katakan $H=\{a+b\sqrt{2}\,|a,b\in\mathbb{Z}.\}$. Buktikan bahawa H adalah subgelanggang bagi $\langle\mathbb{R},+,\times\rangle$ tetapi bukan unggulan.

(30 markah)

- oooOooo -