

---

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang  
Sidang Akademik 2002/2003

April/Mei 2003

**JIM 317 – Persamaan Pembezaan II**

Masa : 3 jam

---

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan.

Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.

Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.

Setiap soalan bernilai 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan di penghujung subsoalan itu.

...2/-

1. Diberi persamaan pembezaan biasa

$$y'' - 2xy' - 2y = 0$$

mempunyai penyelesaian siri dalam bentuk

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

- (a) Tunjukkan bahawa rumus jadi-semula diberi oleh

$$a_n = \frac{2}{n} a_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

(60 markah)

- (b) Cari dua penyelesaian siri yang tak bersandar linear.

(40 markah)

2. (a) Nyatakan titik biasa dan titik singular serta jenisnya bagi persamaan pembezaan.

$$x^2(x-4)^2 y'' + 3xy' - (x-4)y = 0.$$

(30 markah)

- (b) Cari nilai eigen dan fungsi eigen bagi masalah nilai sempadan berikut:

$$y'' - 4\lambda y' + 4\lambda^2 y = 0$$

$$y'(1) = 0$$

$$y(2) + 2y'(2) = 0.$$

(70 markah)

3. (a) (i) Terangkan maksud titik keseimbangan bagi sistem persamaan pembezaan linear yang autonomous.

- (ii) Apakah erti titik keseimbangan yang stabil dan tak stabil?

...3/-

- (iii) Bilakah kestabilan (atau ketakstabilan) mempamerkan ciri-ciri ayunan atau tanpa ayunan?
- (iv) Bagaimana teori bagi sistem autonomous yang linear dapat digunakan untuk kajian terhadap beberapa sistem yang tak linear?

(40 markah)

- (b) Diberi sistem persamaan pembezaan

$$\frac{dx}{dt} = ax + by$$

$$\frac{dy}{dt} = cx + dy$$

dengan  $a$ ,  $b$ ,  $c$  dan  $d$  adalah pemalar.

- (i) Tuliskan sistem ini dalam bentuk persamaan maktriks

$$\frac{dX}{dt} = AX, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- (ii) Cari nilai eigen dalam sebutan  $a$ ,  $b$ ,  $c$  dan  $d$ .
- (iii) Jika  $a + d = 0$  dan  $ad - bc > 0$ , kelaskan jenis titik keseimbangan.

Dalam kes ini, adakah penyelesaian berkenaan berkala, berayun atau sebaliknya?

(60 markah)

4. (a) Tuliskan semula persamaan pembezaan

$$(1-x^2)y'' - xy' + \lambda y = 0, \quad -1 < x < 1$$

dalam bentuk persamaan Sturm-Liouville. Nyatakan dua sifat penting tentang nilai eigen dan fungsi eigen persamaan Sturm-Liouville.

(35 markah)

...4/-

- (b) Pertimbangkan persamaan pembezaan tak linear

$$\frac{dx}{dt} = (x-1)^2(x+2).$$

- (i) Tentukan titik genting dan penyelesaian keseimbangan bagi persamaan tersebut.
- (ii) Lakarkan graf  $x$  terhadap  $t$ . Bincangkan perilaku jangka panjang bagi semua penyelesaian.

(65 markah)

5. Diberi masalah nilai awal

$$\frac{dy}{dt} = 2y$$

$$y(0) = 1.$$

- (a) Tentusahkan  $y(t) = e^{2t}$  adalah penyelesaian analisis.

(20 markah)

- (b) Cari nilai hampiran  $y(0.1)$  dengan menggunakan kaedah Euler satu langkah.

(30 markah)

- (c) Cari batasan bagi ralat pangkasan setempat untuk  $y_1$ .

(30 markah)

- (d) Bandingkan ralat sebenar dalam  $y_1$  dengan batasan ralat yang anda peroleh. Apakah ralat pangkasan global bagi kaedah Euler?

(20 markah)