PENGGUNAAN PARAMETER BENTUK DALAM PENGAWALAN LENGKUNG

NORADZIMAH BT. ABDUL MAJID

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

2004

PENGGUNAAN PARAMETER BENTUK DALAM PENGAWALAN LENGKUNG

oleh

NORADZIMAH BT. ABDUL MAJID

Disertasi yang diserahkan untuk memenuhi
sebahagian keperluan bagi Ijazah Sarjana Sains Matematik

Julai 2004

PENGHARGAAN

Saya ingin mengucapkan ribuan terima kasih kepada penyelia saya, Profesor Madya Dr. Jamaludin Md. Ali di atas bantuan, bimbingan dan khidmat nasihat beliau ke arah menjayakan penghasilan disertasi ini.

Saya juga berterima kasih kepada kakitangan Pusat Pengajian Sains Matematik di atas kemudahan yang disediakan.

Saya amat menghargai sokongan dan dorongan yang telah diberikan oleh keluarga saya yang telah memberikan galakan dan berdoa untuk kejayaan saya.

JADUAL KANDUNGAN

ABSTRAK

Algoritma yang sesuai bagi pengekalan bentuk lengkung sangat penting dalam rekabentuk pemodelan lengkung dalam sistem RGBK. Dalam menjana bentuk lengkung, kewujudan punding dan ayunan menyebabkan bentuknya menjadi tidak licin. Kelemahan ini telah menggalakkan saintis memperkenalkan kaedah bagi mengatasi masalah tersebut.

Matlamat disertasi ini adalah untuk mengkaji bagaimana parameter bentuk dapat mengawal kelicinan bentuk lengkung. Kaedah tradisional menggunakan interpolasi dan titik-titik kawalan dikaji bagi menghasilkan lengkung Bezier, tembereng keratan kon, lengkung Alternatif dan lengkung Beta-Splin. Tembereng keratan kon yang merupakan lengkung Bezier nisbah dihasilkan dengan menggunakan pemberat berasaskan syarat lengkung menginterpolasi titik-titik hujung, penggunaan dua tangen hujung dan satu titik perantaraan. Kajian menunjukkan bahawa bentuk lengkung seperti elips, parabola dan hiperbola dapat dijana dengan menggunakan nilai pemberat tertentu. Dengan kaedah alternatif pula, bentuk lengkung boleh dikawal supaya ia kekal cembung atau berlengkokbalas melalui penggunaan pemberat dan parameter bentuk yang sejajar dengan titik-titik kawalan lengkung daripada selang nilai tertentu.

Penjanaan segmen tembereng keratan kon dengan menggunakan kaedah penurunan lengkung Bezier kubik nisbah juga dikaji dengan menggunakan nilai-nilai pemberat tertentu bagi menghasilkan bentuk elips, parabola dan hiperbola. Dalam lengkung Beta-Splin pula, didapati penggunaan parameter pincang dan parameter tegangan telah dapat mengawal bentuk lengkung supaya ia kekal licin. Bagi menjelaskan dapatan yang diperolehi daripada hasil kajian, gambarajah disertakan pada setiap bab untuk tujuan perbincangan.

CURVE CONTROL WITH SHAPE PARAMETER

ABSTRACT

Efficient algorithms for shape preserving approximation to curves are very important in shape design and modelling in CAGD system. The design of curved shapes have always posed a problem. For example, cusps and excessive oscillation have caused the shape of a curve to vary from the one suggested data.These weaknesses have encouraged scientist to introduce ways that can control the shape of a curve.

The main aim of this dissertation is to study how shape parameter can preserve the smoothness of a curve. Traditional method by using interpolation and control points are studied to form Bezier curve, Conic segment, Alternative curve and Beta-Splines curve. Conic segment which is rational Bezier curve is obtained from Bezier curve by using certain weights as tension parameter. It is characterised by two end points, two end slopes and an immediate point. From the study, it shows that only weight plays an important role in constructing and controlling the shape of a curve segment to form elips, parabola and hyperbola. By using an alternative method, the shape of a curve can be controlled to preserve the convexity of the curve or to produce inflection curve through certain parameters and weight by determining the constraints of corresponding scalar weight with respect to the control points.

This study also discusses about the generalization to conic segment by using the reduced rational cubic curve. The value of weight to construct elips, parabola and hyperbola is also analysed. For Beta-Splines curve, the use of bias parameter(β_1) and tension parameter(β_2) to control the shape and the smoothness of a curve are also studied. To proof the result of the study, examples are presented graphically for discussion.

BAB 1

PENGENALAN

Disertasi ini dibuat untuk memberikan lebih pemahaman tentang rekabentuk sesuatu lengkung. Rekabentuk yang sesuai adalah penting terutamanya bagi membina model kereta, kapal, kapal terbang dan lain-lain. Teknik lama memerlukan perekabentuk melukis bentuk yang dikehendaki di atas papan lukis dengan alatan teknikal. Kerja-kerja ini terlalu sukar, deskriptif dan memerlukan kesabaran yang tinggi. Jika terdapat sebarang kecacatan bentuk yang tidak disenangi, maka pelukis terpaksa melukis semula sehingga terbinanya model yang memuaskan hati pengguna.

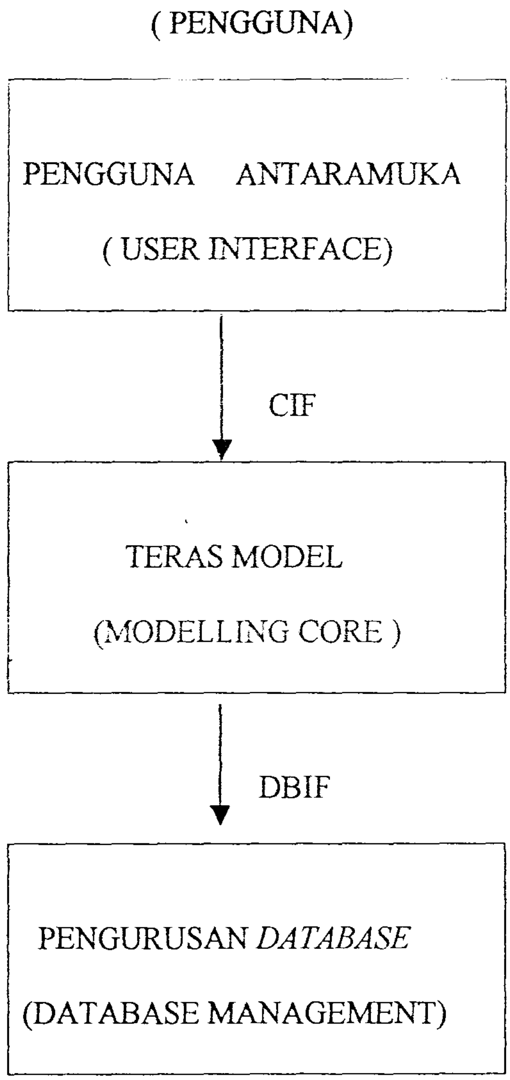
Seterusnya plan model akan digunting dan dibentuk semula di atas kepingan kayu atau tanahliat dan diuji kekuatannya. Sekiranya ia tidak mencapai tahap piawaian yang diperlukan, sekali lagi perekabentuk terpaksa mengulangi semula proses-proses tersebut sehingga pembinaan akhir model yang padat dibuat. Semua proses ini memerlukan tenaga yang terlatih, ketepatan serta kos yang tinggi.

Sekarang, penggunaan komputer banyak membantu dalam proses di atas. Komputer mampu membantu mengira secara cepat dan tepat serta teknologi terkininya dalam pembangunan grafik komputer telah membantu menghasilkan bentuk-bentuk grafik yang kompleks berdasarkan formula dan pengiraan yang diaplikasikan. Perkakasan komputer mampu merekabentuk objek-objek pejal berdasarkan *hardware* dan s*oftware* nya. Ini memudahkan perekabentuk membuat pembetulan atau tambahan kepada bentuk yang dicipta tanpa perlu melukis semula rekabentuk tersebut dan dengan ini model-model boleh lebih singkat. Pengguna pula boleh mengendali, mensintesis dan menganalisis lengkung dan permukaan yang dibentuk. Kebolehan komputer dalam merekabentuk lengkung dan permukaan amat mengkagumkan. Namun begitu komputer tidak dapat melakukan tugas-tugas tersebut dengan sempurna sekiranya tidak terdapat persamaan dan algorithma matematik yang betul. Persamaan dan algorithma matematik inilah yang telah membantu menghasilkan bentuk-bentuk lengkung dan permukaan pada paparan grafik. Kemajuan menjana lengkung dan permukaan dengan menggunakan algorithma matematik pada paparan komputer ini dipanggil Rekabentuk Geometri Berbantukan Komputer(RGBK). RGBK telah diterima sebagai satu cabang ilmu selepas satu persidangan pada tahun 1974 di Universiti Utah, USA(Liu,2001). Ia memainkan peranan penting dalam memaparkan dan menghasilkan acuan berbentuk tiga dimensi dalam industri pembuatan. Bentuk yang ingin dijana boleh diperihalkan secara mendalam dengan menggunakan satu himpunan daripada permukaan parameter. Kemajuan besar dalam RGKB adalah dalam memenuhi permintaan dalam bidang perindustrian dalam merekabentuk benda-benda seperti badan kereta, rangka kapal, badan sayap dan bilah kipas kapal terbang, pelapik kasut dan botol dengan menggunakan lengkung Bezier dan B-Splin.

Satu kaedah yang terkenal dalam merekabentuk permukaan(RGBK) telah dikembangkan oleh Profesor S. Coons daripada MIT. Coons telah memulakan kerja penting dalam rekabentuk permukaan dengan menggunakan interpolasi kubik Hermite yang telah berjaya membangunkan lengkung dan permukaan. Kaedah Coons digunakan menerusi sistem CADANGE dalam syarikat kereta Ford dalam tahun 1967(Farin, 1990). Profesor Bezier yang bekerja dengan syarikat kereta Renault pula telah mengembangkan satu sistem dalam merekabentuk lengkung yang dipanggil sistem UNISURF yang digunakan oleh syarikat kereta tersebut (Nowacki,1980). Seorang jurutera Perancis, Paul de Casteljau yang merupakan pereka asal lengkung Bezier telah mencipta suatu sistem yang digunakan oleh syarikat kereta Citroen di Perancis pada tahun 1959. Walau bagaimanapun Casteljau tidak menerbitkan kerja-kerja beliau, yang seterusnya telah dikembangkan dan diterbitkan oleh Bezier.

Aplikasi RGBK bukan sahaja berguna dalam pembuatan kereta, namun telah berjaya menghasilkan imej bagi objek-objek visual bagi animasi komputer. Ros di Illinois Institute of Technology telah berjaya menukar maklumat rekabentuk dari lukisan kepada format komputer.

Sistem RGBK dibuat berasaskan penghasilan rekabentuk dengan gabungan kerjasama buruh dan mesin perkakas. Ia bergantung kepada interaksi manusia-mesin bagi memaparkan dan menghasilkan acuan berbentuk tiga dimensi dalam industri pembuatan. Di antara peringkat perkembangan yang terdapat dalam penghasilan produk ialah peringkat konsepsi yang merupakan tugas manusia secara kreatif, peringkat penilaian yang melibatkan pengiraan dan proses analitik yang merupakan tugas komputer dan peringkat pertimbangan yang merupakan tugas manusia secara kritikal. Sistem RGBK mempunyai tiga objektif penting iaitu menyokong proses rekabentuk keluaran dan menghasilkan satu definisi keluaran dalaman komputer. Proses merekabentuk adalah proses membuat keputusan berstruktur daripada satu set keperluan ke arah menghasilkan keluaran teknikal yang dipersetujui berdasarkan matlamat ekonomi. Tugas perekabentuk adalah merumuskan masalah rekabentuk sebagai satu proses membuat keputusan berstruktur. Fungsi sistem RGBK ialah untuk membantu proses ini dengan langkah-langkah tertentu dan seterusnya mendokumenkan hasil keluaran dalam *database*. Model senibina asas *software* adalah seperti berikut(Nowacki, 1995)

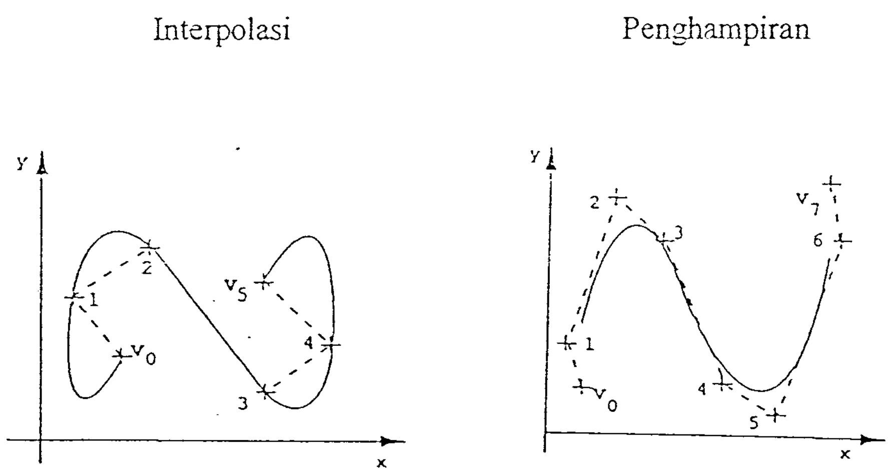


RAJAH 1.1

Senibina Asas *Software* bagi Sistem RGBK

1.1 Sorotan Kaedah Mengekalkan Bentuk Lengkung Secara Interpolasi

Bentuk lengkung dan permukaan yang dibuat bergantung kepada jenis data yang diberikan dan jenis kaedah yang digunakan. Pada asasnya ada dua jenis kaedah yang digunakan untuk merekabentuk dan mengekalkan bentuk lengkung tersebut yang dipanggil penghampiran dan interpolasi(Faux & Pratt, 1979). Rajah 1.2 menerangkan kedua-dua kaedah secara gambarajah. Kaedah penghampiran menggunakan satu set titik-titik data yang menghasilkan lengkung yang tidak melalui titik-titik data tetapi hanya menghampiri titik-titik tersebut. Interpolasi pula akan menghasilkan lengkung yang betul-betul melalui titik-titik data. Dalam disertasi ini kajian hanya ditumpukan kepada kaedah interpolasi.



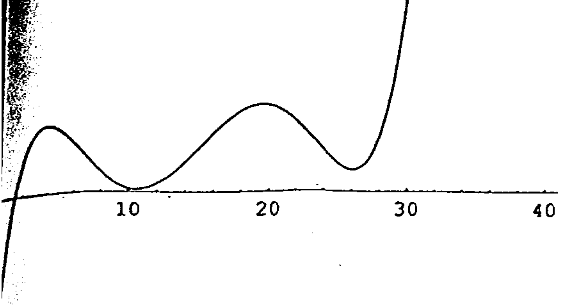
Rajah 1.2

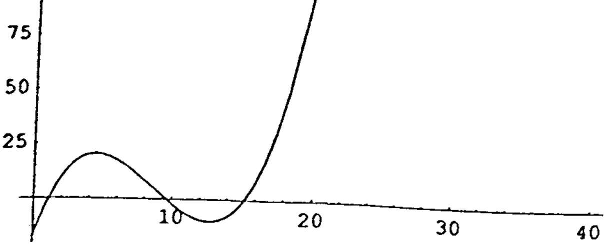
Perbandingan Interpolasi dan Penghampiran

1.1.1 Interpolasi polinomial

Kaedah interpolasi ini dicipta oleh James Gregory dan Sir Isaac Newton yang dipanggil formula Gregory-Newton serta Joseph Louis Lagrange yang dikenali sebagai formula Lagrange. Untuk menakrifkan satu polinomial dengan darjah yang tidak melebihi n-1, dengan n titik-titik yang berlainan, fungsi satu lengkung yang diinterpolasi diberikan dalam bentuk diskret oleh pasangan (x_i, F_i); $i = 1, \ldots, n$. Kaedah interpolasi titik-titik ini boleh digunakan untuk membentuk satu polinomial yang unik(Dodesi, 1978). Darjah bagi lengkung interpolasi bergantung kepada bilangan titik-titik data. Sebagai contoh, bagi satu set yang terdiri daripada empat titik data, lengkung kubik dihasilkan. Namun begitu, oleh kerana darjah kelengkungan bergantung kepada bilangan titik-titik data, lebih banyak bilangan titik-titik data, maka lebih tinggi darjah lengkung tersebut. Masalah akan timbul bila bilangan titik-titik data bertambah kerana lengkung akan cenderung untuk berayun(oscillate) disebabkan pertambahan darjah bagi lengkung dan menghasilkan banyak titik-titik lengkok balas. Kewujudan titik-titik tersebut menyebabkan bentuk lengkung menjadi tidak licin. Oleh itu interpolasi polinomial tidak praktikal bagi bilangan titik yang banyak dalam satu data interpolasi(Lihat Rajah 1.3).

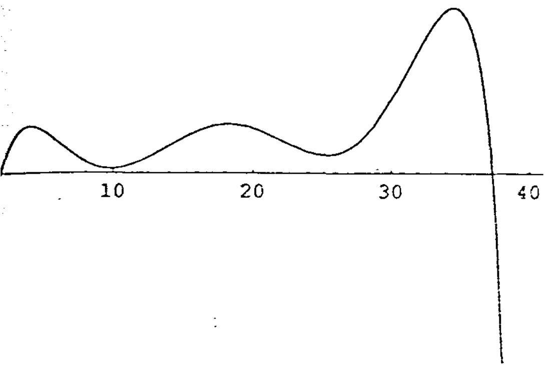
Penakrifan lengkung di atas menggunakan bentuk fungsian. Ia merupakan kelemahan kerana kesukaran untuk menakrif lengkung di sepanjang data bukan fungsian serta lengkung tertutup. Bentuk fungsian yang biasanya dipengaruhi oleh satu set parameter yang boleh diubah-suai kepada sama ada menginterpolasi atau menghampiri data-data yang ditetapkan merupakan pilihan yang tidak praktikal disebabkan masalah di atas.

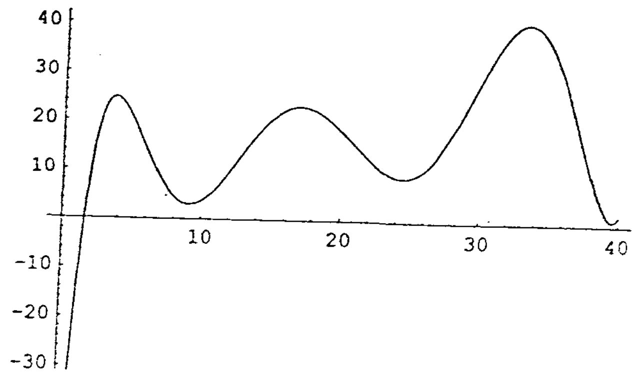




Lagrange dengan 4 bilangan titik data

Lagrange dengan 5 bilangan titik data

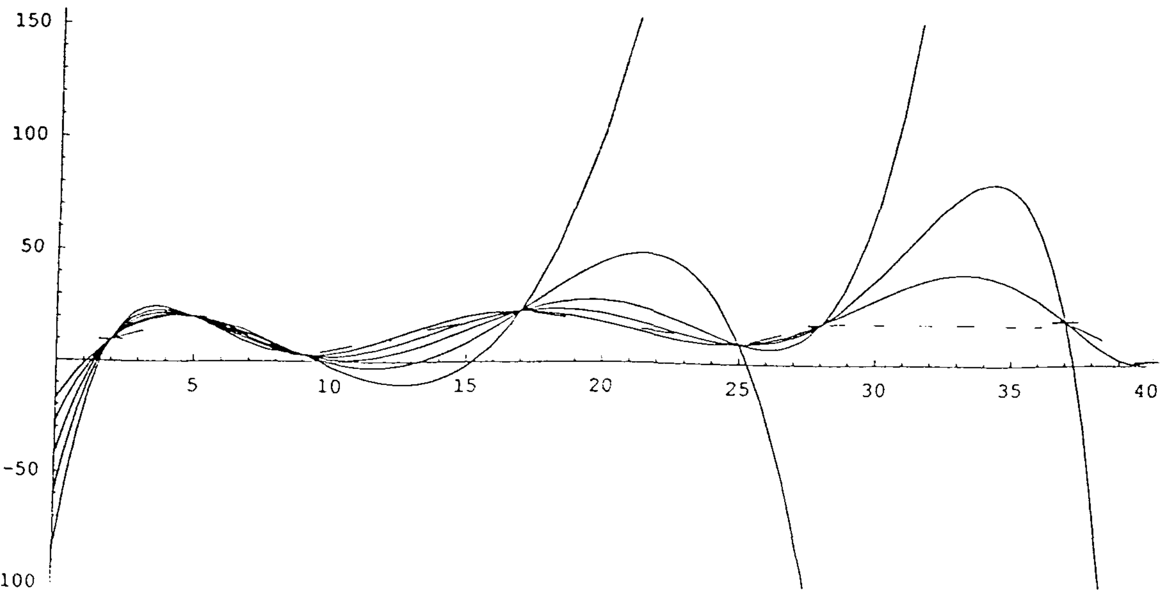




Lagrange dengan 6 bilangan titik data

Lagrange dengan 7 bilangan titik data

Rajah 1.3(a)
Interpolasi polinomial Lagrange dengan bilangan n(titik-titik data) yang berbeza



Rajah 1.3(b)
Gabungan interpolasi polinomial Lagrange dengan n=3,4,5,6,7

1.1.2 Interpolasi parameter

Satu pendekatan bagi mengatasi masalah ini adalah dengan menggunakan perwakilan parameter bagi menakrif kaedah merekabentuk lengkung bukan fungsian. Pendekatan menggunakan perwakilan parameter untuk menakrif interpolasi lengkung berparameter ialah dalam keadaan cebis demi cebis. Kaedah yang digunakan adalah secara menaktif lengkung bagi tiap-tiap dua titik data yang bersebelahan dan kemudian menyambung lengkung-lengkung ini supaya menghasilkan satu lengkung interpolasi. Jika kita semata-mata menakrif lengkung cebis demi cebis tanpa menghiraukan tentang jenis penyambungan yang diperlukan melalui setiap titik-titik data, lengkung umum yang dihasilkan akan hanya bersambung pada titik titik data, tetapi penyambungan lengkung-lengkung tersebut tidak menghasilkan satu lengkung yang licin atau dengan lain perkataan setiap lengkung cebis demi cebis ini tidak bertemu dengan kecerunan yang sama pada titik-titik data. Jenis interpolasi lengkung ini menghasilkan hanya keselanjaran kedudukan atau keselanjaran G^0.

Bagaimanapun bagi tujuan rekabentuk, kita memerlukan satu lengkung interpolasi yang licin iaitu lengkung yang dihasilkan mempunyai sekurang-kurangnya keselanjaran G^1. Oleh itu untuk membolehkan kedua-dua lengkung cebis demi cebis bercantum secara licin pada setiap titik-titik data, kita harus menyediakan satu satah tangen yang sama pada titik-titik tersebut. Satu contoh interpolasi cebis demi cebis yang menggunakan perwakilan parameter adalah interpolasi kubik Hermite pada rajah 1.4(a). Lengkung cebis demi cebis nya adalah satu polinomial parameter kubik yang memadankan kedudukan dan nilai terbitan susunan pertama pada titik-titik hujung. Interpolasi Hermite mempunyai kebaikan dalam mengurangkan ayunan.

Satu cara yang lebih mudah dalam melakarkan lengkung adalah berasaskan perwakilan parameter yang telah direkabentuk oleh jurutera Paul de Casteljau. Algorithma de Casteljau telah dibaiki dengan lebih jelas di dalam dua lapuran teknikal yang tidak diterbitkan di Perancis (Boehm et al ,1984). Lengkung ditakrif secara manipulasi terus pada satu set titik-titik data yang hampir-hampir sama dengan orientasi titik-titik data. Titik-titik data ini dikenali sebagai titik-titik kawalan dan garis-garis yang menyambung titik-titik kawalan membentuk satu poligon kawalan. Lengkung yang ditakrif oleh algorithma ini menginterpolasi hanya titik-titik akhir dan melakukan penganggaran atau penghampiran ke atas titik-titik lain.

Bezier mencadangkan kaedah lain untuk merekabentuk lengkung(Nowacki,1980). Kaedah Bezier adalah menggunakan fungsi asas polinomial Bernstein sebagai pekali bagi titik-titik data untuk menakrif lengkung. Lengkung Bezier berkongsi sifat-sifat yang dibina oleh de Casteljau dan juga digunakan sebagai lengkung cebis demi cebis yang ditakrif secara interpolasi.

Seorang saintis, W Bohm telah melihat hasil lapuran de Casteljau serta hasil kajiannya sendiri telah mendapati kedua-dua kaedah de Casteljau dan Bezier menghasilkan lengkung yang sama(Farin,1990). Tambahan pula bentuk de Casteljau boleh ditukarkan ke bentuk Bezier dan sebaliknya dengan cara membuktikan algorithma Casteljau adalah satu algorithma rekursi untuk menakrif lengkung Bezier. Walaubagaimanapun lapuran teknikal yang dibuat oleh de Casteljau tidak diterbitkan menyebabkan kaedah tersebut mengambil sempena nama Bezier setelah beliau menerbitkan kerja-kerjanya. Titik-titik kawalan yang digunakan untuk menakrif lengkung Bezier sekarang dikenali sebagai titik-titik kawalan Bezier. Satu perbezaan di antara kaedah Bezier dan algorithma de Casteljau boleh dilihat bila terdapat bilangan titik-titik data yang besar. Kaedah Bezier kekal mudah untuk diimplimentasikan manakala algorithma de Casteljau menjadi tidak efisien secara pengiraan(Boehm et al,1984).

Selain Bezier yang menggunakan polinomial Bernstein untuk menakrif satu lengkung berdasarkan titik-titik kawalan, ramai pengkaji cuba menggunakan fungsi pengadun lain untuk melihat samada lengkung Bezier boleh diperbaiki. Ferguson (1964) daripada syarikat kapalterbang Boeng menggunakan parameter Splin bagi menggantikan polinomial Bernstein manakala de Boor(1978) menggunakan fungsi B-Splin sebagai fungsi asas. W Gorden dan R Riesenfeld telah berjaya menunjukkan bahawa lengkung B-Splin adalah generalisasi bagi lengkung Bezier(Boehm et al, 1984).

Ball(1977) telah menggantikan polinomial Bernstein kubik dengan satu set fungsi asas kubik yang lain untuk menakrif satu lengkung kubik. Said telah membuat generalisasi ke atas lengkung Ball kubik ke darjah yang lebih tinggi dan dalam masa yang sama menghasilkan algorithma` rekursinya. Sama seperti Bezier, lengkung Ball Said juga menginterpolasi titik-titik hujung dan boleh digunakan untuk memajukan interpolasi cebis demi cebis.

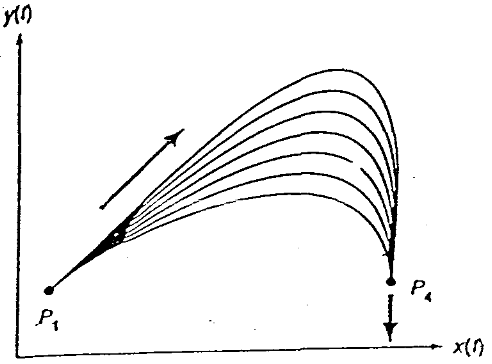
Boehm telah membuat penyelidikan dalam hubungan di antara lengkung kubik Bezier dan lengkung kubik Ball. Beliau mendapati bentuk Bezier lebih diminati kerana ia banyak menggunakan sifat-sifat daripada polinomial Bernstein. Walaubagaimanapun, satu kelebihan bentuk Ball adalah jika kawalan titik dalaman diturunkan, bentuk kubik akan terturun menjadi bentuk kuadratik(Said, 1990).

Timmer(1980) daripada kumpulan syarikat kapal terbang Douglas telah memperbaiki poligon pengadun kubik Bernstein dan mencipta pendekatan satu lengkung kubik yang tidak hanya menginterpolasi titik-titik hujung tetapi juga titik-titik pertengahan pada poligon kawalan. Lengkung yang terhasil menggunakan poligon kawalan yang lebih hampir, lengkung menginterpolasi titik hujung yang menjadi tangen kepada poligon kawalan dan lengkung melalui titik tengah poligon kawalan. Kubik Timmer mempunyai kelebihan dengan membenarkan perekabentuk menjangka dan meramal bentuk-bentuk yang lebih baik bagi lengkung dengan mengetahui sifat keserupaannya dengan orientasi poligon kawalan dan dalam masa yang sama masih mengekalkan sifat-sifat lengkung Bezier. Kubik Timmer juga ditunjukkan lebih ekonomi dalam penyimpanan ingatan komputer. Walaubagaimanapun, kaedah Timmer tidak memuaskan sifat-sifat hul cembung (Said, 1990).

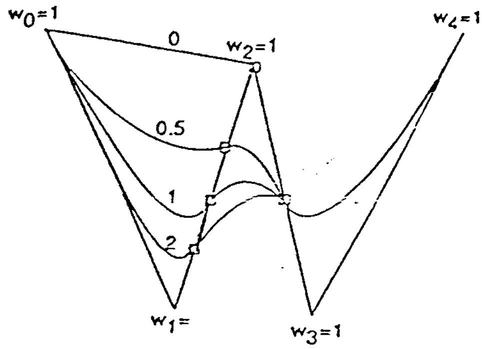
Seterusnya timbul variasi bagi teknik melukis lengkung parameter. Goodman(1988) menggunakan lengkung Bezier kubik nisbah untuk menakrif bentuk interpolasi yang terpelihara. Pendekatan ini juga digunakan oleh Said(1992) untuk menakrif bentuk interpolasi kubik Ball nisbah. Said juga menggabungkan lengkung Ball kubik dan menghasilkan jenis lengkung Bezier Ball dengan tambahan parameter bagi perekabentuk untuk mengubah bentuk lengkung di antara jenis Bezier dan jenis Ball. Ia juga digunakan pada lengkung Timmer dengan tambahan nilai tertentu ke atas parameternya.

Penggunaan lengkung berparameter mampu menjanjikan huraian lengkung yang lebih baik dengan menggunakan parameter-parameter bentuk bagi mengawal lengkung seperti yang ditunjukkan dalam Rajah 14. Daripada rajah tersebut, paparan beberapa jenis lengkung seperti lengkung Hermite, lengkung B-Splin, lengkung Ferguson dan lengkung Bezier nisbah ditunjukkan dengan menggunakan vektor tangen, pemberat dan perubahan darjah lengkung sebagai parameter bentuk. Penggunaan parameter bentuk telah memberikan lebih fleksibiliti dan kebebasan dalam menghasilkan pelbagai bentuk lengkung.

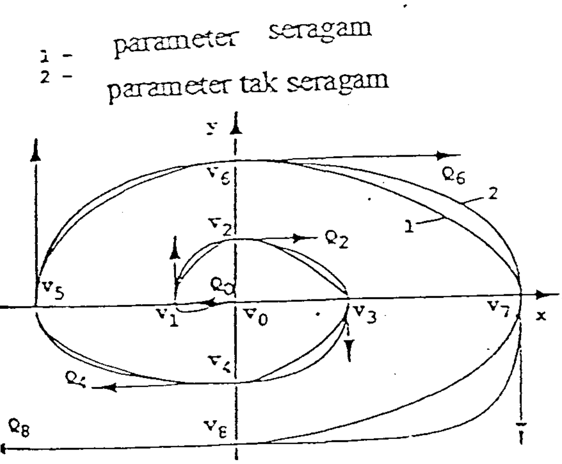
Kepentingan parameter bentuk ke atas bentuk-bentuk lengkung tidak boleh dinafikan terutamanya untuk menghasilkan objek-objek tiga dimensi. Gabungan pengawalan bentuk lengkung dengan menggunakan titik-titik kawalan dan parameter bentuk telah menghasilkan satu perwakilan yang penting yang sangat berguna di dalam aplikasi grafik komputer dan Rekabentuk Berbantu Komputer(RGBK) untuk mengawal bentuk lengkung. Namun begitu untuk tujuan menghasilkan lengkung yang berkualiti, kajian dari masa ke semasa perlu dibuat ke atas profil lengkung dan permukaan.



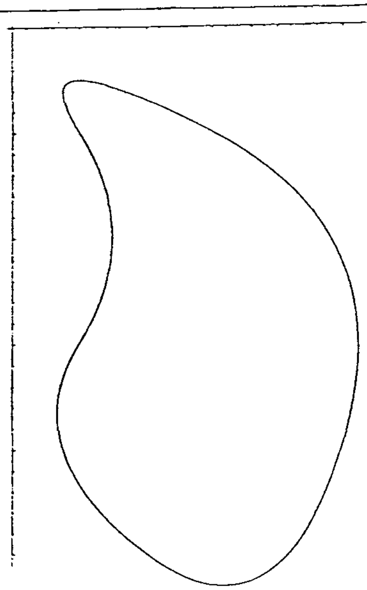
(a)
Lengkung Hermite
Menggunakan vektor tangent bagi mengawal bentuk lengkung(arah vektor tangent pada P_1 berubah manakala pada P_4 tetap)



(b)
Lengkung B-Spline
Menggunakan berbagai nilai pemberat w bagi mengawal bentuk lengkung



(c)
Lengkung Ferguson
Menggunakan parameter bentuk bagi mengawal bentuk lengkung



Lengkung Bezier nisbah(tertutup)
Menggunakan pemberat w dan perubahan darjah n bagi mengawal bentuk lengkung

Rajah 1.4

Rajah menunjukkan beberapa contoh lengkung dengan penggunaan parameter yang berbeza-beza bagi mengawal bentuk lengkung

1.3 Objektif Penyelidikan Masalah

Disertasi ini secara umumnya membincangkan suatu teknik pengawalan bentuk lengkung satah secara geometri dengan menggunakan Rekabentuk Geometri Berbantu Komputer(RGBK). Satu lengkung boleh dihasilkan daripada satu set titik data yang diskret di mana bilangan titik data akan menentukan darjah polinomial lengkung tersebut. Masalah timbul kerana lengkung dengan darjah polinomial yang tinggi akan menghasilkan ayunan. Oleh kerana bilangan titik data berkadar langsung dengan darjah polinomial, lengkung yang terjana akan menghasilkan ayunan yang tidak diingini apabila lebih banyak titik data digunakan. Keselanjaran tertentu yang dikenakan ke atas lengkung pula menghasilkan punding(*cusps)* iaitu keadaan yang mana tangen bagi lengkung tiba-tiba bertukar arah walaupun segmen-segmen lengkung adalah bersambung. Kelemahan-kelemahan ini diatasi dengan memperkenalkan beberapa parameter bentuk yang boleh mengawal bentuk lengkung. Penggunaan parameter bentuk telah banyak memberi sumbangan dalam rekabentuk dan sains, contohnya dalam pembuatan kereta dan kapal dan pemerihalan fenomena fizikal.

Dalam rekabentuk lengkung dan permukaan parameter bentuk telah digunakan sebagai parameter pelicin yang mampu mengawal dan mengekalkan bentuk lengkung dengan menggunakan berbagai kaedah yang sesuai. Terdapat kaedah yang dapat mengawal bentuk lengkung pada selang dan juga pada titik interpolasi.

Dalam disertasi ini kajian dibuat terhadap pengawalan bentuk lengkung dengan menggunakan beberapa parameter bentuk dengan mengemukakan beberapa teori, konsep dan kaedah matematik. Di antara lengkung-lengkung yang dibincangkan adalah lengkung Bezier, tembereng keratan kon, lengkung Alternatif dan lengkung Beta Splin. Daripada kajian, didapati peningkatan dalam nilai parameter bentuk akan menghasilkan bentuk lengkung yang lebih baik.

Dalam membincangkan penggunaan parameter bentuk pada hampir keseluruhan bab, perincian diberikan pada setiap bab iaitu dalam bab 1, kepentingan lengkung serta kaedah mengekalkan bentuk lengkung secara interpolasi dibincangkan. Kaedah interpolasi polinomial dan interpolasi parameter dihuraikan secara memberikan kelebihan dan kekurangan kedua-duanya. Interpolasi parameter mempunyai kelebihan dalam mengawal bentuk lengkung yang licin kerana penggunaan parameter bentuk seperti pemberat dalam fungsi asasnya.

Bab 2 menyatakan tentang jenis-jenis lengkung yang terdiri daripada lengkung eksplisit(lengkung tersirat), lengkung implisit(tidak tersirat) dan lengkung berparameter yang seterusnya telah membawa kepada sifat lengkung dari segi keselanjaran, kelengkungan, kecembungan dan magnitud tangennya. Dari kajian ke atas setiap jenis lengkung, di dapati lengkung berparameter merupakan lengkung yang lebih baik dalam mengawal bentuk lengkung kerana ia menggunakan tambahan parameter bentuk.

Bab 3 membincangkan tentang lengkung Bezier nisbah yang menggunakan pemberat sebagai parameter bentuk bagi mengawal bentuk lengkung. Daripada lengkung Bezier nisbah, penjanaan tembereng keratan kon yang dibuat memerlukan syarat-syarat iaitu dua titik hujung, dua tangen hujung dan satu titik perantaraan untuk membina dan mengawal secara geometri satu lengkung yang menginterpolasi titik data. Perubahan nilai pemberat dari selang tertentu mempengaruhi bentuk lengkung-lengkung yang terhasil. Penentuan kekangan bagi pemberat dikaji bagi membolehkan bentuk hiperbola, parabola dan elips dihasilkan.

Bab 4 mengkaji lengkung nisbah alternatif yang memberikan lebih fleksibiliti untuk menjana lengkung tanpa mengubah titik kawalan. Parameter bentuk iaitu pemberat serta tambahan parameter a dan parameter b digunakan dalam mengawal bentuk lengkung. Magnitud tangen yang juga merupakan parameter bentuk diubah dalam pengawalan bentuk lengkung dan kesannya diperhatikan melalui corak pergerakan lengkung.

Bab 5 mengkaji pembinaan tembereng keratan kon daripada lengkung Alternatif. Kajian dibuat ke atas penggunaan nilai pemberat w_i dan parameter bentuk α dan β bagi menjana keratan kon berbentuk elips, parabola dan hiperbola dengan mematuhi syarat $w_1 = w_2$ dan $\alpha = \beta = 2$.

Bab 6 membincangkan lengkung Beta –Splin yang menggunakan parameter pincang dan parameter tegangan untuk mengawal bentuk lengkung. Fungsi parameter pincang dan tegangan dilihat secara berasingan melalui janaan lengkung terbuka dan tertutup. Kesimpulan bagi disertasi ini diberikan dalam bab tujuh dan diakhiri dengan rujukan-rujukan.

BAB 2

PERWAKILAN LENGKUNG

Bab ini membincangkan suatu analisa tentang perwakilan lengkung satah iaitu lengkung eksplisit(tidak tersirat), lengkung implisit(tersirat) dan lengkung berparameter. Sifat-sifat lengkung dari segi keselanjaran, kelengkungan, kecembungan dan magnitud tangen yang merupakan parameter-parameter bentuk juga dihuraikan secara ringkas.

2.1 Model lengkung eksplisit(tersirat) dan implisit(tidak tersirat)

Lengkung satah adalah satu lengkung yang boleh dilukis dalam bentuk dua dimensi pada satu permukaan. Dalam RGBK, fokus utama adalah menggunakan langkah-langkah matematik untuk mengawal lengkung dan dalam masa yang sama membenarkan lengkung-lengkung bebas dihasilkan. Dengan menggunakan formula matematik, terdapat beberapa cara untuk mewakili satu lengkung samada dalam bentuk eksplisit, implisit dan berparameter.

2.1.1 Lengkung eksplisit(tidak tersirat)

Satu lengkung satah dalam satah $x \rightarrow y$ boleh diplot dengan menggunakan formula dalam bentuk eksplisit seperti $y = f(x)$ di mana x mengambil semua nilai dari $-\infty$ ke $+\infty$ atau sebagai subset bagi nilai-nilai yang diberi. Berdasarkan setiap nilai x nilai y boleh dikira daripada formula f(x).

Contoh :

i) $y = mx + c$

$y = -0.5x + 1.2$ (Rajah 2.1)

ii) $y = ax^2 + c$

$y = -0.5x^2 + 1.2$ (Rajah 2.2)

iii) $y = ax^3 + bx^2 + c$

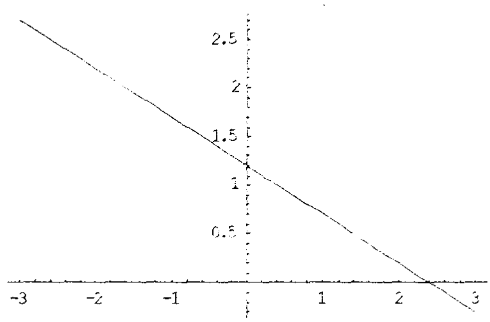
a) $y = 3x^3 - 2x^2 + 2$ (Rajah 2.3)

b) $y = 3x^3 - 2x^2 + 2x + 2$ (Rajah 2.4)

Jika $a > 0$ dan $b < 0$, maka graf yang ditunjukkan dalam rajah mempunyai dua titik lengkok balas.

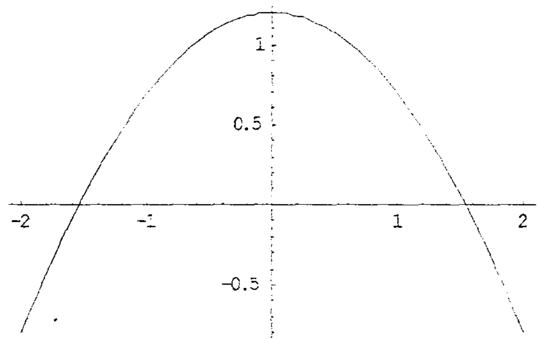
iv) $y = a/x$

a) $a > 0$ (Rajah 2.5) dan b) $a < 0$ (Rajah 2.6)



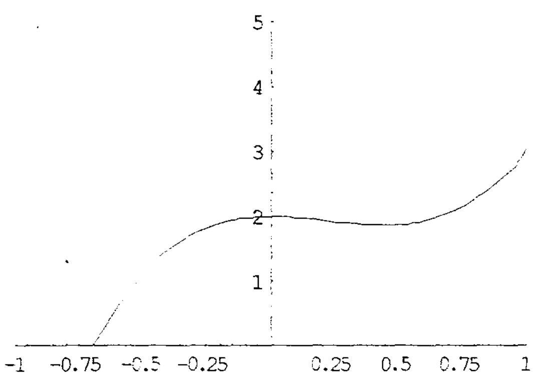
Rajah 2.1

Garis Lurus $y = -0.5x + 1.2$



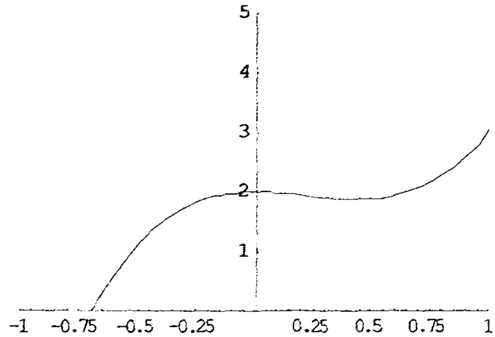
Rajah 2.2

Parabola, $y = -0.5x^2 + 1.2$



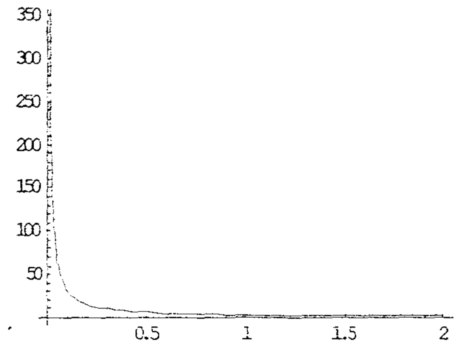
Rajah 2.3

$y = 3x^3 - 2x^2 + 2$



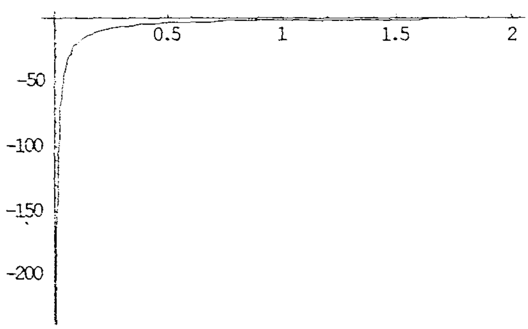
Rajah 2.4

$y = 3x^3 - 2x^2 + 2x + 2$



Rajah 2.5

y = 3/x



Rajah 2.6

y = -2/x

2.1.2 Lengkung implisit(tersirat)

Model lengkung boleh diwakilkan secara implisit, dengan persamaan implisit dalam bentuk $f(x,y)=0$. Koordinat (x,y) adalah titik koordinat yang dilalui oleh lengkung tersebut. Apabila fungsi F berbentuk polinomial pada pembolehubahnya iaitu x dan y, F dinamakan lengkung algebra(algebraic curve). Kaedah ini mempunyai risikonya kerana persamaan yang diberi mungkin mempunyai penyelesaian yang lebih daripada yang kita perlukan. Sebagai contoh formula implisit bagi satu unit bulatan ialah $x^2+y^2=1$. Masalah berlaku untuk memodelkan setengah bulatan kerana kita perlu menambah kekangan lain seperti $x \geq 0$ yang tidak boleh dikandungi di dalam persamaan implisit. Tambahan pula jika dua segmen lengkung dalam bentuk implisit dicantum, adalah sukar untuk menentukan samada arah kedua-dua tangen adalah sama atau tidak pada titik cantuman. Namun begitu, dalam bentuk implisit adalah lebih mudah untuk menentukan samada satu titik yang diberi terletak di atas lengkung atau tidak berbanding dengan bentuk eksplisit. Persilangan lengkung-lengkung adalah lebih mudah jika satu daripada lengkung-lengkung tersebut diberi dalam bentuk implisit.

2.1.3 Lengkung berparameter

Suatu lengkung berparameter di dalam satah mempunyai bentuk persamaan C(t) = (x(t), y(t)) dengan t sebagai simbol bagi parameter. Untuk menggambarkan lengkung pada ruang, persamaan ditulis sebagai C(t) = (x(t),y(t),z(t) dengan (x(t),y(t) dan z(t) adalah fungsi koordinat manakala C(t) adalah surihan bagi lengkung C. Subset bagi lengkung juga merupakan suatu lengkung yang dinamakan segmen lengkung atau tembereng lengkung. Persamaan berparameter yang ditakrifkan oleh fungsi koordinat adalah berbentuk polinomial untuk menghasilkan lengkung polinomial. Penentuan darjah bagi lengkung ini adalah merujuk kepada kuasa terbesar pada parameter daripada mana-mana fungsi koordinatnya.

Suatu fungsi p(t)/q(t) $\neq 0$ adalah dalam bentuk nisbah jika p(t) adalah satu polinomial. Lengkung berparameter yang ditakrifkan dengan fungsi koordinat bernisbah dipanggil lengkung nisbah. Darjah lengkung nisbah ditentukan oleh kuasa terbesar pada fungsi koordinatnya samada pada pengangka p(t) atau penyebut q(t).

Penjanaan bentuk lengkung berparameter boleh dilakukan dengan cara berikut. Pertimbangkan lengkung dalam bentuk C(t) = (x(t),y(t)) dalam satah, tertakrif pada selang $[a,b]$. Dengan menjana sejumlah n+1 titik berkoordinat $(x(t_i),y(t_i))$, dengan $t_0 < t_1 < t_n$ dan $t_0 = a$, $t_n = b$, titik-titik yang terhasil disambungkan dengan tembereng-tembereng garis untuk menghasilkan penghampiran linear bagi lengkung tersebut. Hasil penghampiran adalah bergerigi dan untuk menambah kelicinan penghampiran tersebut, bilangan titik perlu ditingkatkan.

Contoh

i) $x(t) = -3t + 0.25$; $y(t) = t + 1$ (rajah 2.7)

ii) $x(t) = \dfrac{1-0.5t^2}{1+2t^2}$ $\quad y(t) = \dfrac{-2t}{1+2t^2}$ adalah sebahagian bulatan (rajah 2.8)

iii) lengkung berparameter melalui 3 titik

Satu kaedah untuk menghasilkan lengkung dalam bentuk parameter adalah dengan cara menggunakan kaedah menghasilkan lengkung dalam bentuk eksplisit bagi koordinat x dengan x = x(t) dan bagi y, y = y(t). Sebagai contoh, parabola yang menginterpolasi data $(-1, y_{-1}), (0, y_0)$ dan $(1, y_1)$ adalah

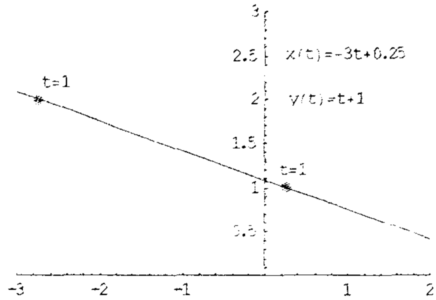
$$y(x) = \left(\frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{2}\right)x^2 + \left(\frac{y_1 - y_{-1}}{2}\right)x + y_0$$

Satu lengkung berparameter yang melalui $(x_{-1}, y_{-1}), (x_0, y_0)$ dan (x_1, y_1) dengan nilai parameter -1,0,1 pada tiga titik adalah

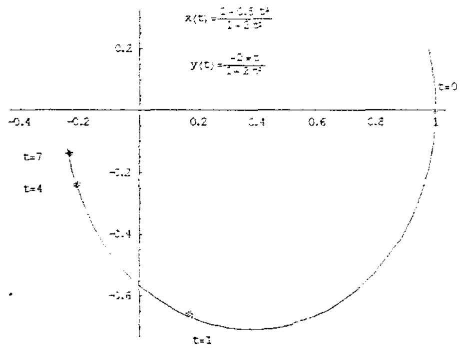
$$x(t) = \left(\frac{x_1 - 2x_0 + x_{-1}}{2}\right)t^2 + \left(\frac{x_1 - x_{-1}}{2}\right)t + x_0,$$

(Rajah 2.9)

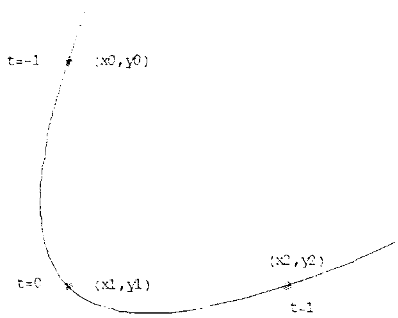
$$y(t) = \left(\frac{y_1 - 2y_o + y_{-1}}{2}\right)t^2 + \left(\frac{y_1 - y_{-1}}{2}\right)t + y_0$$



Rajah 2.7
$x(t) = -3t + 0.25$, $y(t) = t + 1$



Rajah 2.8
$x(t) = (1-0.5t^2)/(1-2t^2)$, $y(t) = -2t/(1+t^2)$, $-0.1 \leq t \leq 1$



Rajah 2.9
Satu lengkung berparameter melalui 3 titik yang diberi