UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination
Academic Session 2005/2006

November 2005

**MSS 302 – Real Analysis**
***[Analisis Nyata]***

Duration : 3 hours
*[Masa : 3 jam]*

Please check that this examination paper consists of **SIX** pages of printed material before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **ENAM** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

**Instructions :**
**Part I** : Give briefly answers to **all FIFTEEN [15]** questions. Each question is worth one mark.

**Part II** : Solve any **FIVE [5]** out of the **SEVEN [7]** questions. Each question is worth 20 marks.

*[Arahan :*
***Bahagian I :*** *Jawab **semua LIMA BELAS [15]** soalan dengan ringkas. Setiap soalan diberikan satu markah.*

***Bahagian II :*** *Jawab sebarang **LIMA [5]** dari **TUJUH [7]** soalan. Setiap soalan diberikan 20 markah.]*

**...2/-**

**Part I** : Give briefly answers to **all** **FIFTEEN [15]** questions. Each question is worth one mark.

***Bahagian I*** : *Jawab* ***semua*** ***LIMA BELAS [15]*** *soalan dengan ringkas. Setiap soalan diberikan satu markah.*

1. Is it true that the intersection of an infinite number of open sets is always open?

*1. Adakah benar bahawa tindanan tak terhingga banyaknya set-set terbuka adalah terbuka?*

2. It is true that the union of an infinite number of open sets is always open?

*2. Adakah benar bahawa kesatuan tak terhingga banyaknya set-set terbuka adalah terbuka?*

3. Write the definition of a uniformly continuous function on a metric space

*3. Berikan takrifan bagi fungsi yang selanjar secara seragam pada satu ruang metrik.*

4. Is it true that a multiplication of two uniformly continuous functions functions is always uniformly continuous?

*4. Adakah benar bahawa hasil darab dua fungsi yang selanjar secara seragam adalah selanjar secara seragam?*

5. Write the definition of a compact set in a metric space.

*5. Tuliskan takrifan bagi set padat pada satu ruang metrik.*

6. What is the characterization of a compact set in the metric space $\mathbb{R}_d$ ?

*6. Apakah ciri yang terdapat pada satu set yang padat di dalam ruang metrik* $\mathbb{R}_d$ ?

7. What is the characterization of a compact set in the Euclidean metric space $\mathbb{R}^n$ ?

*7. Apakah ciri yang terdapat pada satu set padat di dalam ruang metrik Euclidean* $\mathbb{R}^n$ ?

...3/-

8. What can you say about a continuous function on a compact set?

*8. Apakah yang dapat anda perkatakan tentang satu fungsi yang selanjar pada set padat.*

9. Write the definition of a pointwise convergent sequence of functions on $A \subset \mathbb{R}$.

*9. Tuliskan takrifan bagi jujukan fungsi yang menumpu secara titik demi titik pada* $A \subset \mathbb{R}$.

10. Write the definition of a uniform convergent sequence of functions on $A \subset \mathbb{R}$.

*10. Tuliskan takrifan bagi jujukan fungsi yang menumpu secara seragam pada* $A \subset \mathbb{R}$.

11. What is the main difference between pointwise and uniform convergence?

*11. Apakah perbezaan utama diantara menumpu secara titik demi titik dengan menumpu secara seragam.*

12. When does a pointwise convergent sequence of functions imply uniform convergence?

*12. Bilakah jujukan fungsi yang menumpu secara titik demi titik menjadi menumpu secara seragam.*

13. Write the definition of an equicontinous set in a metric space.

*13. Tuliskan takrifan bagi satu set yang sama selanjar pada satu ruang metrik.*

14. Write the definition of a Riemann integrable function.

*14. Tuliskan takrifan bagi fungsi yang terkamirkan secara Riemann.*

15. Is a continuous functions on a closed and bounded interval always Riemann integrable?

*15. Adakah satu fungsi yang selanjar pada selang yang tertutup dan terbatas sentiasa terkamirkan secara Riemann.*

...4/-

**Part II** : Solve any **FIVE [5]** out of the **SEVEN [7]** questions. Each question is worth 20 marks.

***Bahagian II** : Jawab sebarang **LIMA [5]** dari **TUJUH [7]** soalan. Setiap soalan diberikan 20 markah.]*

1. (a) Prove that if a map $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ is continuous on $\mathbb{R}$ then its graph $G=\{(x,g(x))\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:x\in\mathbb{R}\}$ is a closed subset of the Euclidean space $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

   (b) Show by finding an example that the converse of (a) is false.

*1. (a) Buktikan bahawa jika pemetaan $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ selanjar pada $\mathbb{R}$, maka graf $G=\{(x,g(x))\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:x\in\mathbb{R}\}$ adalah suatu subset kepada ruang Euclidean $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.*

   *(b) Tunjukkan dengan menggunakan contoh bahawa akas kepada (a) adalah tidak benar.*

2. (a) Let $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ be defined by $f_n(x)=x^n$. Show that the set $\{f_n:n\in\mathbb{N}\}$ is not an equicontinuous subset of $C[0,1]$

   (b) Let $g_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ be defined by $g_n(x)=n$. Show that the set $\{g_n:n\in\mathbb{N}\}$ is an equicontinuous subset of $C[0,1]$. Can you apply the Aezela-Ascoli Theorem to conclude that the sequence $(g_n)$ has a subsequence which converges uniformly to some function in $C[0,1]$? Prove your answer.

*2. (a) Biarkan $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ ditakrifkan sebagai $f_n(x)=x^n$. Tunjukkan bahawa set $\{f_n:n\in\mathbb{N}\}$ adalah bukan suatu subset yang sama selanjar pada $C[0,1]$.*

   *(b) Biarkan $g_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ ditakrifkan sebagai $g_n(x)=n$. Tunjukkan bahawa set $\{g_n:n\in\mathbb{N}\}$ adalah suatu subset yang sama selanjar pada $C[0,1]$. Seterusnya bolehkah anda menggunakan Teorem Aezela-Ascoli untuk menunjukkan bahawa jujukan $(g_n)$ mempunyai subjujukan yang menumpu secara seragam kepada suatu fungsi pada $C[0,1]$? Buktikan kenyataan anda.*

3. (a) Consider the metric space $\ell^2$, and let $e_k$ be the element of $\ell^2$ given by

$$e_k=(0,0,0,\cdots,1,0,0,\cdots)$$

...5/-

where the 1 is the $k$th term of the sequeunce.
Show that $E=\{e_k \in \ell^2 : k \in \mathbb{N}\}$ is a bounded subset of $\ell^2$, but is not totally bounded

(b) Prove that $A=\{(x_n)\in \ell^2 : \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^2 < 1\}$ is an open subset of $\ell^2$

3. *(a) Pertimbangkan satu ruang metrik $\ell^2$, dan biarkan $e_k$ unsur kepada $\ell^2$ yang diberikan sebagai*

$$e_k = (0,0,0,\cdots,1,0,0,\cdots)$$

*dimana 1 adalah unsur ke-k bagi jujukan di atas.*
*Seterusnya, tunjukkan bahawa $E=\{e_k \in \ell^2 : k \in \mathbb{N}\}$ adalah satu subset yang terbatas pada $\ell^2$, tetapi bukannya satu set yang terbatas secara keseluruhan.*

*(b) Buktikan bahawa $A=\{(x_n)\in \ell^2 : \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^2 < 1\}$ adakah satu subset kepada $\ell^2$ yang terbuka.*

4. (a) Show that the Dirichlet function $f:[0,1]\to[0,1]$ defined by

$$f(x)=\begin{cases} 1 & x\in[0,1]\cap\mathbb{Q} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

is not a Riemann integrable function

(b) Prove / disprove the following statement : If $f$ is a Riemann integrable function, then the function $|f|(x)=|f(x)|$ is Reimann integrable.

4. *(a) Tunjukkan bahawa satu fungsi Dirichlet $f:[0,1]\to[0,1]$ yang ditakrifkan sebagai*

$$f(x)=\begin{cases} 1 & x\in[0,1]\cap\mathbb{Q} \\ 0 & \text{sebaliknya} \end{cases}$$

*adalah satu fungsi yang tak terkamirkan secara Riemann.*

*(b) Buktikan / sangkal dengan contoh penyataan berikut : Jika $f$ adalah satu fungsi yang terkamirkan secara Riemann, maka fungsi $|f|(x)=|f(x)|$ adalah terkamirkan secara Reimann.*

...6/-

5. Let $f_n : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ be a continuous function on the Euclidean space $\mathbb{R}^m$ for every *n*. Suppose *K* is a compact subset of $\mathbb{R}^m$, and $(f_n)$ converges uniformly to *f* on *K*. Show that the set $S = f(K) \cup \left( \cup_{n \in \mathbb{N}} f_n(K) \right)$ is compact in the Euclidean space $\mathbb{R}^m$.

5. *Biarkan $f_n : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ satu fungsi yang selanjar pada ruang Euclidean $\mathbb{R}^m$, untuk setiap n. Katakan K satu subset padat pada $\mathbb{R}^m$, dan $(f_n)$ menumpu secara seragam ke f pada K. Tunjukkan bahawa set $S = f(K) \cup \left( \cup_{n \in \mathbb{N}} f_n(K) \right)$ adalah padat di dalam ruang Euclidean $\mathbb{R}^m$.*

6. Show that the metric space $C[a,b]$ with the metric

$$d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a,b]\}$$

is complete, but is not compact.

6. *Tunjukkan bahawa ruang metrik $C[a,b]$ dengan fungsi metrik*

$$d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a,b]\}$$

*adalah lengkap tetapi tidak padat.*

7. Let $(X,d)$ be a metric space, and let *A* be a closed subset of *X*. Define $f : X \to \mathbb{R}$ by $f(x) = \inf\{d(x,y) : y \in A\}$. Show that

(a) *f* is continuous on *X*

(b) $f(x) = 0$ if and only if $x \in A$.

7. *Biarkan $(X,d)$ satu ruang metrik dan A satu subset kepada X yang tertutup. Takrifkan $f : X \to \mathbb{R}$ sebagai $f(x) = \inf\{d(x,y) : y \in A\}$. Tunjukkan bahawa*

*(a) f adalah selanjar pada X*

*(b) $f(x) = 0$ jika dan hanya jika $x \in A$.*

-ooo000ooo-