UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang Akademik 2003/2004

September / Oktober 2003

**MSS 302 – ANALISIS NYATA**

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **TIGA [3]** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **semua tujuh** soalan.

...2/-

1. Diberi $f = [a,b] \to R$ ialah suatu fungsi menokok.

   (a) Tunjukkan bahawa $\forall c \in (a,b)$, kedua-dua had

   $$\underset{x \to c^-}{had} f(x) \text{ dan } \underset{x \to c^+}{had} f(x)$$

   adalah wujud.

   (b) Biarkan $D = \{ c \in [a,b] \mid f \text{ tak selanjar pada } x = c \}$
   Tunjukkan bahawa $D$ adalah terbilangkan.

   (c) Tunjukkan bahawa $f$ terkamirkan pada $[a,b]$.

[100 markah]

2. (a) Diberi $S = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \,\middle|\, n, m \in N \right\}$
   Cari semua titik pedalaman (interior points) dan titik had (accumulation points) $S$. Tentukan adakah S satu set terbuka atau set tertutup

   (b) Jelaskan dengan contoh yang sesuai bahawa konsep "set terbuka" adalah konsep relatif.

   (c) Buktikan bahawa konsep "set padat" adalah konsep mutlak.

3. (a) Gunakan kriteria Lebesgue untuk membuktikan, jika f dan g adalah terkamirkan pada $[a,b]$, maka $f \cdot g$ juga terkamirkan pada $[a,b]$.

   (c) Diberi f, g adalah terkamirkan pada $[a,b]$ dan $f(x) \geq m > 0, \forall x \in [a,b]$.
   Tunjukkan bahawa fungsi $h$ yang ditakrifkan sebagai

   $$h(x) = (f(x))^{g(x)}$$

   adalah terkamirkan pada $[a,b]$.

4. Diberi $f : [0,1] \to R$ takrifkan sebagai

   $$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{jika } \quad x \in Q^c \\ \frac{1}{p}, & \text{jika } \quad x \in Q \ \text{ dan } x = \frac{q}{p}, (q,p) = 1 f(0) = 0 \end{cases}$$

   (a) Nilaikan $\underline{\int_0^1} f$ dan $\overline{\int_0^1} f$. Tentukan adakah $f$ terkamirkan pada $[0,1]$.

   (b) Tunjukkan bahawa f adalah selanjar pada $x = a$ jika dan hanya jika $a \in Q^c$
   Dengan yang demikian, tentusahkan jawapan anda dalam (a)

5. Diberi $f : R^3 \to R$ ditakrifkan sebagai

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xyz$$

Cari semua minimum dan maksimum setempat $f$.

6. Diberi $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{jika } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{jika } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Tunjukkan bahawa f selanjar tetapi tetapi tak terbezakan pada titik $(0,0)$.

7. Diberi suatu lengkung dengan persamaan $x^2 + y + \sin(xy) = 0$

(a) Bolehkah lengkung itu mentakrifkan satu fungsi $y = f(x)$ pada jiran $(0,0)$ secara tak tersirat?

(b) Bolehkah lengkung itu mentakrifkan satu fungsi $x = g(y)$ pada jiran $(0,0)$ secara tak tersirat?

Jelaskan jawapan anda.

- ooo O ooo -