
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
Academic Session 2005/2006

April/May 2006

MSS 301 – Complex Analysis
[Analisis Kompleks]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions : Answer **all four** [4] questions.

[Arahan : ***Jawab semua empat*** [4] soalan].

.../2-

1. (a) Find all complex numbers z satisfying the equation $z^2 = \bar{z}^2$.
- (b) If z is a complex number with unit modulus, then show that z can be written in the form $z = \alpha / \bar{\alpha}$ for some nonzero complex number α .
- (c) If z and w are two complex numbers, then show that

$$||z| - |w|| \leq |z - w|.$$

Discuss the case of equality.

- (d) Let a and b be two complex numbers. Show that $|a - b| < |a + \bar{b}|$ if and only if $\operatorname{Re}(a) \operatorname{Re}(b) > 0$.
- (e) Show that

$$1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2} \cos \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

Is it valid for all θ ?

[25 marks]

1. (a) Tentukan semua nombor kompleks z yang memenuhi persamaan $z^2 = \bar{z}^2$.
- (b) Jika z adalah suatu nombor kompleks dengan unit modulus, tunjukkan bahawa z boleh ditulis dalam bentuk $z = \alpha / \bar{\alpha}$ untuk beberapa nombor kompleks α yang bukan sifar.
- (c) Jika z dan w adalah dua nombor kompleks, tunjukkan bahawa

$$||z| - |w|| \leq |z - w|.$$

Bincangkan kes ketaksamaan ini.

- (d) Andaikan a dan b adalah nombor kompleks. Tunjukkan bahawa $|a - b| < |a + \bar{b}|$ jika dan hanya jika $\operatorname{Re}(a) \operatorname{Re}(b) > 0$.
- (e) Tunjukkan bahawa

$$1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2} \cos \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

Adakah ianya dipenuhi untuk semua θ ?

[25 markah]

.../3-

2. (a) Let $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ be defined by $f(z) = |z|^2$ and $z_0 \in \mathbb{C}$.
- Is f continuous at $z = z_0$?
 - Does f satisfy Cauchy-Riemann equations at $z = z_0$?
 - Is f differentiable at $z = z_0$?
 - Is f analytic at $z = z_0$?
 - Is f harmonic in \mathbb{C} ?
- (b) State and prove the sufficient condition for a function $f(z)$ to be differentiable at a given point.
- (c) Show that the real part of an analytic function is harmonic and hence deduce that

$$\nabla^2 |f(z)|^2 = 4 |f'(z)|^2.$$

[25 marks]

2. (a) *Andaikan $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ditakrifkan sebagai $f(z) = |z|^2$ dan $z_0 \in \mathbb{C}$.*
- Adakah f selanjar pada $z = z_0$?*
 - Adakah f memenuhi persamaan Cauchy-Riemann pada $z = z_0$?*
 - Adakah f terbezakan pada $z = z_0$?*
 - Adakah f analisis pada $z = z_0$?*
 - Adakah f harmonic dalam \mathbb{C} ?*
- (b) *Nyatakan dan buktikan bahawa syarat cukup untuk fungsi $f(z)$ terbezakan pada titik yang diberikan.*
- (c) *Tunjukkan bahawa bahagian nyata bagi suatu fungsi analisis adalah harmonik dan seterusnya deduksikan bahawa*

$$\nabla^2 |f(z)|^2 = 4 |f'(z)|^2.$$

[25 markah]

3. (a) Evaluate the integral $\int_{\gamma} z dz$ where γ is the portion of the parabola $y = x^2$ between $x = -1$ and $x = 1$.
- (b) Using Cauchy integral formula, evaluate

$$\int_{\gamma} \frac{\operatorname{Re} z}{z - \alpha} dz, (0 < \alpha < 1)$$

where γ is the unit circle $|z|=1$.

.../4-

- (c) Evaluate the integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4 \cos \theta}.$$

- (d) State and prove the fundamental theorem of algebra.

[25 marks]

3. (a) *Nilaikan kamiran $\int_{\gamma} z dz$ di mana γ adalah suatu bahagian dalam parabola $y = x^2$ diantara $x = -1$ dan $x = 1$.*

- (b)
- Dengan menggunakan rumus kamiran Cauchy, nilaikan*

$$\int_{\gamma} \frac{N_{\gamma} z}{z - \alpha} dz, (0 < |\alpha| < 1)$$

dimana γ ialah unit bulatan $|z| = 1$.

- (c)
- Nilaikan kamiran*

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4 \cos \theta}.$$

- (d)
- Nyatakan dan buktikan teorem asas aljabar.*

[25 markah]

4. (a) Define convergent and Cauchy sequences. Show that a sequence is convergent if and only if it is a Cauchy sequence.

- (b) Obtain Laurent series expansion of the function

$$f(z) = \frac{z+1}{z(z-1)}$$

valid in

- (i) $0 < |z| < 1$,
- (ii) $|z| > 1$,
- (iii) $0 < |z-1| < 1$,
- (iv) $|z-1| > 1$.

.../5-

- (c) Using Cauchy's residue theorem, evaluate

$$\int_{\gamma} \frac{z}{(z^2+1)^2} dz$$

where γ is a simple closed curve enclosing $z = \pm i$.

[25 marks]

4. (a) Takrifkan penumpuan dan jujukan Cauchy. Tunjukkan bahawa suatu jujukan menumpu jika dan hanya jika ia adalah Cauchy.

- (b) Dapatkan pengembangan siri Laurent bagi fungsi

$$f(z) = \frac{z+1}{z(z-1)}$$

sah dalam

- (i) $0 < |z| < 1$,
 - (ii) $|z| > 1$,
 - (iii) $0 < |z-1| < 1$,
 - (iv) $|z-1| > 1$.
- (c) Menggunakan teorem reja Cauchy, nilaikan

$$\int_{\gamma} \frac{z}{(z^2+1)^2} dz$$

di mana γ ialah suatu lengkung tertutup ringkas meliputi $z = \pm i$.

[25 markah]

-ooo000ooo-