
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 2005/2006

Jun 2006

MSS 301 – Analisis Kompleks

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

[Arahan: Jawab semua empat [4] soalan].

1. (a) If z and w are two complex numbers, show that

(i) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$,

(ii) $|z+w| \leq |z| + |w|$.

[10 marks]

- (b) If $|a| < 1$ and $|b| < 1$, then show that

$$\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| < 1.$$

[10 marks]

- (c) Express -1 in polar form and hence find all the values of $(-1)^i$.

[5 marks]

1. (a) Jika z dan w adalah dua nombor kompleks, tunjukkan bahawa

(i) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$,

(ii) $|z+w| \leq |z| + |w|$.

[10 markah]

- (b) Jika $|a| < 1$ dan $|b| < 1$, maka tunjukkan

$$\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| < 1.$$

[10 markah]

- (c) Tuliskan -1 dalam bentuk kutub dan seterusnya cari semua nilai bagi $(-1)^i$.

[5 markah]

2. (a) Examine the limit of the function $f(z) = |z|/z$ as $z \rightarrow 0$.

[5 marks]

- (b) If the function $f(z)$ is differentiable at a point $z = z_0$, then show that it is continuous at $z = z_0$.

[5 marks]

- (c) Is the function $f(z) = \Im z$ differentiable at any point in the complex plane? Justify your answer.

[5 marks]

.../3-

- (d) Verify that the real part of the analytic function $f(z) = z^2 + z$ is harmonic.
[5 marks]
- (e) Using any one of the four methods, find an analytic function whose real part is given by $u(x, y) = x^2 - y^2$.
[5 marks]
2. (a) Periksa had fungsi $f(z) = |z|/z$ apabila $z \rightarrow 0$.
[5 markah]
- (b) Jika fungsi $f(z)$ terbezakan pada titik $z = z_0$, maka tunjukkan $f(z)$ adalah selanjar pada $z = z_0$.
[5 markah]
- (c) Adakah fungsi $f(z) = \Im z$ terbezakan pada sebarang titik pada satah kompleks? Buktikan jawapan anda..
[5 markah]
- (d) Tentusahkan bahawa bahagian nyata bagi fungsi analisis $f(z) = z^2 + z$ adalah harmonik.
[5 markah]
- (e) Dengan menggunakan salah satu daripada empat kaedah, cari suatu fungsi analisis yang mempunyai bahagian nyatanya ialah $u(x, y) = x^2 - y^2$.
[5 markah]
3. (a) Find the parametric representation of the unit circle $|z|=1$ and hence evaluate the integral

$$\int_{|z|=1} z dz.$$
[5 marks]
- (b) If $f(z)$ is analytic and has continuous derivative $f'(z)$ inside and on a simple closed curve γ , then show that.

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$
[5 marks]

- (c) Let γ be a closed curve, $\alpha \in \text{Int}(\gamma)$ and $\beta \in \text{Ext}(\gamma)$. Evaluate

$$\int_{\gamma} \frac{zdz}{(z-a)(z-b)}.$$

[5 marks]

- (d) Evaluate the integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a\sin\theta} \quad (0 < a < 1).$$

[10 marks]

3. (a) Cari perwakilan berparameter bagi bulatan unit $|z|=1$ dan seterusnya nilaikan kamiran

$$\int_{|z|=1} z dz.$$

[5 markah]

- (b) Jika $f(z)$ adalah analisis dan mempunyai terbitan selanjar $f'(z)$ pada dan dalam suatu lengkung tertutup ringkas γ , maka tunjukkan

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

[5 markah]

- (c) Biar γ merupakan suatu lengkung tertutup, $\alpha \in \text{Int}(\gamma)$ dan $\beta \in \text{Ext}(\gamma)$. Nilaikan.

$$\int_{\gamma} \frac{zdz}{(z-a)(z-b)}.$$

[5 markah]

- (d) Nilaikan kamiran

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a\sin\theta} \quad (0 < a < 1).$$

[10 markah]

4. (a) Define convergent sequence and Cauchy sequence. Show that a convergent sequence is a Cauchy sequence.

[5 marks]

- (b) Expand the function

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

into Laurent's series valid in

- (i) $0 < |z| < 1$,
(ii) $1 < |z| < 2$, and
(iii) $|z| > 2$.

[10 marks]

- (c) Find the residue of the function

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)^2}$$

at the poles of the function.

[10 marks]

4. (a)
- Takrifkan penumpuan jujukan dan jujukan Cauchy. Tunjukkan satu jujukan yang menumpu adalah suatu jujukan Cauchy*

[5 markah]

- (b)
- Kembangkan fungsi*

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

menjadi suatu siri Laurent yang sah dalam

- (i) $0 < |z| < 1$,
(ii) $1 < |z| < 2$, dan
(iii) $|z| > 2$.

[10 markah]

- (c)
- Cari reja bagi fungsi*

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)^2}$$

pada kutubnya.

[10 markah]