

---

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination  
2013/2014 Academic Session

June 2014

**MSG 228 – Introduction to Modelling**  
***[Pengenalan Pemodelan]***

Duration : 3 hours  
*[Masa : 3 jam]*

---

Please check that this examination paper consists of SIX pages of printed material before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi ENAM muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

**Instructions:** Answer **all nine** [9] questions.

**Arahan:** Jawab **semua sembilan** [9] soalan].

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

*[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai.]*

1. Use difference equations to formulate a dynamical model of the following situation:

A sewage treatment plant processes raw sewage to produce usable fertilizer and clean water by removing all other contaminants. The process is such that each hour 12% of remaining contaminants in a processing tank are removed. Build a dynamical model for the hourly amount of sewage contaminant left in the treatment plant.

[10 marks]

1. *Gunakan persamaan perbezaan untuk merangka model dinamik bagi situasi berikut:*

*Sebuah loji rawatan kumbahan memproses kumbahan mentah untuk menghasilkan baja yang boleh digunakan dan air bersih dengan mengeluarkan semua bahan pencemar lain. Proses ini adalah sedemikian sehinggakan setiap jam 12% daripada baki bahan cemar dalam tangki pemprosesan dikeluarkan. Bina model dinamik untuk jumlah bahan cemar kumbahan yang tinggal pada setiap jam dalam loji rawatan tersebut.*

[10 markah]

2. Formulate the following problem as a linear programming problem:

A farmer owns 10 acres of land. She is planning to plant each acre with watermelon or corn. Each acre of watermelon yields RM200 in profits, whereas each acre of corn yields RM300 in profits. The labor and fertilizer requirements for each acre are provided in the table below. The farmer has 100 workers and 120 tons of fertilizer available.

	Watermelon	Corn
Labor (number of workers)	3	2
Fertilizers (tons)	2	4

[10 marks]

2. *Rumuskan masalah berikut sebagai masalah pengaturcaraan linear:*

*Seorang petani memiliki 10 ekar tanah. Dia merancang untuk menanam setiap ekar dengan tembikai atau jagung. Setiap ekar tembikai menghasilkan RM200 dalam keuntungan, manakala setiap ekar jagung menghasilkan RM300 keuntungan. Keperluan buruh dan baja bagi setiap ekar diberikan dalam jadual di bawah. Petani itu mempunyai 100 pekerja dan 120 tan baja.*

	Tembikai	Jagung
Buruh (bilangan pekerja)	3	2
Baja (tan)	2	4

[10 markah]

3. Derive the equations that minimizes the sum of squared deviations between a set of data points and the linear model  $y = ax + b$  where  $a$  and  $b$  are the model parameters.

[10 marks]

3. Terbitkan persamaan yang meminimumkan jumlah sisihan kuasa dua antara satu set titik data dan model linear  $y = ax + b$  di mana  $a$  dan  $b$  adalah parameter model.

[10 markah]

4. A certain drug is effective in treating a disease if the concentration remains above 100mg/L. Let  $d_n$  represents the concentration of the drug after  $n$  hours and the dynamical model for  $d_n$  is given by

$$d_{n+1} = 0.8d_n.$$

- (a) Suppose an initial dosage of 640 mg/L is prescribed. How long does it take for the concentration level to reach 100mg/L.  
(b) Suppose it is required that the concentration of the drug to remain above 100mg/L for at least 5 hours. What is the recommended initial dosage in this case?

[20 marks]

4. Satu dadah tertentu adalah berkesan dalam merawat penyakit jika kepekannya berada di atas 100mg/L. Biar  $d_n$  mewakili kepekatan dadah selepas  $n$  jam dan model dinamik untuk  $d_n$  diberikan oleh

$$d_{n+1} = 0.8d_n.$$

- (a) Katakan dos awal 640 mg/L dipreskripsikan. Berapa lama masa yang diambil untuk tahap kepekatan untuk mencapai 100mg/L.  
(b) Andaikan ia diperlukan bahawa kepekatan dadah kekal melebihi 100mg/L untuk sekurang-kurangnya 5 jam. Apakah dos awal yang disyorkan dalam kes ini?

[20 markah]

5. Given the following linear programming problem:

Maximize  $6x + 4y$

subject to

$$-x + y \leq 12$$

$$x + y \leq 24$$

$$2x + 5y \leq 80$$

$$x, y \geq 0$$

Solve the problem using graphical method.

[20 marks]

5. Diberi masalah pengaturcaraan linear berikut:

Maksimakan  $6x + 4y$   
tertakluk kepada

$$\begin{aligned} -x + y &\leq 12 \\ x + y &\leq 24 \\ 2x + 5y &\leq 80 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

Selesaikan masalah ini menggunakan kaedah grafik.

[20 markah]

6. The growth of a certain population is described by the following autonomous differential equation:

$$\frac{dP}{dt} = 2P(P-3).$$

- (a) Find the equilibrium values of this population.
- (b) Use a phase line analysis to sketch solution curves for  $P(t)$ , starting from several different initial values  $P(0)$ . Hence determine the stability of equilibrium values in a).

[20 marks]

6. Pertumbuhan penduduk yang tertentu digambarkan oleh persamaan pembezaan autonomi berikut:

$$\frac{dP}{dt} = 2P(P-3).$$

- (a) Cari nilai-nilai keseimbangan bagi penduduk ini.
- (b) Gunakan analisis garis fasa untuk melakar lengkung penyelesaian untuk  $P(t)$ , bermula dari beberapa nilai awal yang berbeza  $P(0)$ . Seterusnya tentukan kestabilan nilai-nilai keseimbangan dalam a).

[20 markah]

7. Given a dynamical model of the form

$$a_{n+1} = ra_n + b,$$

where  $r$  and  $b$  are nonzero constants.

- (a) Find the equilibrium solution for the model.
- (b) Show that the general solution of the model is given by

$$a_n = r^n c + \frac{b}{1-r},$$

where  $c$  is a nonzero constant.

- (c) Discuss the stability of the equilibrium solution in a) in the following cases:
  - (i)  $|r| > 1$ ;
  - (ii)  $|r| < 1$ .

[30 marks]

...5/-

7. Diberikan satu model dinamik dalam bentuk

$$a_{n+1} = ra_n + b,$$

di mana  $r$  dan  $b$  adalah pemalar bukan sifar.

- (a) Cari penyelesaian-penyelesaian seimbangan untuk model ini.
- (b) Tunjukkan bahawa penyelesaian am model ini diberikan oleh

$$a_n = r^n c + \frac{b}{1-r},$$

di mana  $c$  adalah pemalar bukan sifar.

- (c) Bincangkan kestabilan penyelesaian seimbang dalam a) dalam kes-kes berikut:
  - (i)  $|r| > 1$ ;
  - (ii)  $|r| < 1$ .

[30 markah]

8. The following data represent the growth of a population of fruit flies over a 6 week period.

$t$ (days)	7	14	21	28	35	42
$P$ (number of observed flies)	8	41	133	250	280	297

- (a) Use the least squares criterion to estimate the parameters for the following models:
  - (i)  $P = ct$ , where  $c$  is the model parameter;
  - (ii)  $P = ae^{bt}$ , where  $a$  and  $b$  are the model parameters.
- (b) Compare the sum of squared deviations for both models. Which model gives a better fit to the given data?

[30 marks]

8. Data berikut mewakili pertumbuhan populasi lalat buah dalam tempoh 6 minggu.

$t$ (hari)	7	14	21	28	35	42
$P$ (bilangan lalat yang diperhatikan)	8	41	133	250	280	297

- (a) Gunakan kriteria kuasa dua terkecil untuk menganggarkan parameter untuk model berikut:
  - (i)  $P = ct$ , di mana  $c$  ialah parameter model;
  - (ii)  $P = ae^{bt}$ , di mana  $a$  dan  $b$  ialah parameter model.
- (b) Bandingkan jumlah sisihan kuasa dua untuk kedua-dua model. Model mana yang memberikan penyuaian yang lebih baik kepada data yang diberikan?

[30 markah]

9. Consider two species whose survival depends on their mutual cooperation. Let's take as an example a species of bee that feeds primarily on the nectar of one plant species and simultaneously pollinates that plant. One simple model of this **mutualism** is given by the autonomous system

$$\frac{dx}{dt} = -ax + bxy$$

$$\frac{dy}{dt} = -my + nxy$$

- (a) What assumptions are implicitly being made about the growth of each species in the absence of cooperation?
- (b) Interpret the constants  $a$ ,  $b$ ,  $m$  and  $n$  in terms of the physical problem.
- (c) What are the equilibrium levels?
- (d) Perform a graphical analysis and indicate the trajectory directions in the phase plane.

[30 marks]

9. *Pertimbangkan dua spesies yang kelangsungan hidupnya bergantung kepada kerjasama mereka. Mari kita mengambil contoh satu spesies lebah yang makanan utamanya madu dari satu spesies tumbuhan dan pada masa yang sama mendebungkan tumbuhan tersebut. Salah satu model yang mudah bagi kebersamaan ini diberikan oleh sistem autonomi*

$$\frac{dx}{dt} = -ax + bxy$$

$$\frac{dy}{dt} = -my + nxy$$

- (a) *Apakah andaian yang tersirat yang dibuat tentang pertumbuhan setiap spesies jika tiada kerjasama?*
- (b) *Terjemahkan pemalar-pemalar  $a$ ,  $b$ ,  $m$  dan  $n$  dari segi masalah fizikal.*
- (c) *Apakah paras-paras keseimbangannya?*
- (d) *Lakukan analisis grafik dan tunjukkan arah trajektori dalam satah fasa.*

[30 markah]