
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination
2014/2015 Academic Session

December 2014/January 2015

MAT 222 – Differential Equations II
[Persamaan Pembezaan II]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of **NINE** pages of printed material before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **SEMBILAN** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

MAT 221 – DIFFERENTIAL EQUATION II

Answer all questions

1. a) Consider the nonlinear system

$$x'(t) = x^2 + 1$$

$$y'(t) = x(y - 1)$$

i) Find the x-nullcline and the y-nullcline

ii) Find the fixed point.

b) Let α be a real constant. Given the system

$$x'(t) = y$$

$$y'(t) = \alpha x - 2y$$

i) what is the characteristic polynomial of the coefficient matrix for the system

ii) compute its eigenvalues and eigenvectors (the answer depends on α , hence the need to break the answer into cases)

iii) write down the general solution of the system.

c) Explain what is meant when we say the trajectories in the neighbourhood of an equilibrium point is structurally stable.

2. a) Find the solutions of the following system

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(x, y) = x^3 - x \\ \frac{dy}{dt} &= G(x, y) = -2y \end{aligned}$$

i) Find the critical points

ii) Are these points stable?

iii) Give a rough sketch of the phase portrait

b) In a linearised system, the eigenvalues at a critical point are pure imaginary

i) Describe the trajectories around the critical point

ii) If the parameters (constants) in the system are slightly perturbed, what are the effects on the trajectories?

c) What is the difference between an autonomous and a non-autonomous system? Give an example of each.

3. a) i) What is an isoclines?

ii) Given a system

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}, \quad x \in [-2, 2], \quad y \in [-2, 2]$$

sketch a direction field.

b) i) What is a periodic function?

ii) Given a periodic function $f(x)$, with period P , it can be represented by a Fourier series

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Find formulas for a_0, a_n and b_n .

c) A function $f(x)$ is defined as

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

i) Find a Fourier representation of the function

ii) Under what theoretical condition will the given function equals the Fourier representation?

4. a) The Sturm Liouville operator is defined as

$$\mathcal{L} = \frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx} + q(x)$$

Give a description of the Sturm-Liouville eigenvalue problem

b) Given the following differential equation

$$a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x) y = f(x)$$

put it into Sturm-Liouville form.

c) Consider the following boundary value problem

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \frac{y}{x} = \frac{1}{x}, \quad x \in [1, b]$$

$$y(1) = 0 = y(b)$$

Write down the solution in terms of the generalised Fourier series expansion.

5. A partial differential equation problem can be written as

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t), \quad 0 < x < l$$

$$u(x, 0) = x - x^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$$

i) Evaluate the eigenvalues

ii) Find the corresponding orthonormalised eigenfunctions

iii) Find the general solution.

+++++

MAT 221 - PERSAMAAN PEMBEZAAN II

Jawab semua soalan

1. a) Pertimbangkan sistem tak linear berikut

$$x'(t) = x^2 + 1$$

$$y'(t) = x(y - 1)$$

i) Carikan nullcline-x dan nullcline-y

ii) Dapatkan titik tetap

b) Andaikan α satu pemalarnya. Diberi sistem

$$x'(t) = y$$

$$y'(t) = \alpha x - 2y$$

i) apakah polinomial ciriannya? Bagaima matriks pekali untuk sistem

ii) hitungkan nilai eigen dan vektor eigen (jawapan bergantung kepada α , makaperlu untuk bahagikan jawapan kepada kes)

iii) tuliskan penyelesaian am bagi sistem.

c) Terangkan apa yang

dimaksudkan apabila kita mengatakan trajektor dalam kawasan kejiranan titik keseimbangan stabil secara berstruktur.

2. a) Carikan penyelesaian untuk sistem berikut

$$dx / dt = F(x, y) = x^3 - x$$

$$dy / dt = G(x, y) = -2y$$

- i) Carikan titik kritis
 ii) Adakah titik-titik ini stabil?
 iii) Berikan lakaran kasar potret fasa
- b) Dalam sistem terlinear, nilai eigen pada satu titik kritis adalah nombor khayalan
 i) Perihalkan trajektori-trajektori di sekitar titik kritis
 ii) Jika parameter (pemalar) dalam sistem diuisik, apakah kesan ke atas trajektori?
 c) Apakah perbezaan di antara sistem autonomi dan sistem bukan autonomi?
 Berikan contoh bagi setiap satu.
3. a) i) Apakah yang dimaksudkan dengan secerun?
 ii) Diberi sistem

$$dy/dx = -y/x, \quad x \in [-2, 2], \quad y \in [-2, 2]$$
 lakarkan medan arah.
- b) i) Apakah yang dimaksudkan dengan fungsi berkala?
 ii) Diberi fungsi f berkala (x), dengan kala P , ianya boleh diwakilkan oleh siri Fourier

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$
 Cari formula untuk a_0 , a_n dan b_n .
- c) Satu fungsi $f(x)$ ditakrifkan sebagai

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$$
 i) Cari perwakilan Fourier untuk fungsi
 ii) Apakah keadaan teoretis agar fungsi yang diberikan sama dengan perwakilan Fourier?
4. a) Pengendali Sturm Liouville ditakrifkan sebagai

$$L = (dp(x)/dx) d/dx + q(x)$$
 Berikan perihalan mengenai masalah nilai eigen Sturm-Liouville
- b) Diberi persamaan pembezaan berikut

$$a_2(x) \frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x)$$
 letakkannya ke dalam bentuk Sturm-Liouville.
- c) Pertimbangkan masalah nilai sempadan berikut

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \frac{y}{x} = \frac{1}{x}, \quad x \in [1, b]$$

$$y(1) = 0 = y(b)$$
 Tulis penyelesaian dalam sebutan kembangan siri Fourier am.
5. Satu masalah persamaan pembezaan separabel boleh dituliskan sebagai

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t), \quad 0 < x < l$$

$$u(x, 0) = x - x^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$$
 i) Dapatkan nilai eigen
 ii) Dapatkan fungsi eigen pengortonormalan yang sepadan
 iii) Cari penyelesaian am.