
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination
2014/2015 Academic Session

December 2014/January 2015

MAT 203 – Vector Calculus
[Kalkulus Vektor]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of SIX pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi ENAM muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all seven** [7] questions.

Arahan: Jawab **semua tujuh** [7] soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

1. (a) Find c such that the vector $\mathbf{u} = -2c\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ orthogonal to the vector $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3c\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$.
- (b) Given that the line ℓ_1 passes through the points $A(1,0,-1)$ and $B(-1,1,0)$ and the line ℓ_2 passes through the points $P(3,1,-1)$ and $Q(4,5,-2)$. Find a vector perpendicular to both lines ℓ_1 and ℓ_2 .

[12 marks]

1. (a) Dapatkan c supaya vektor $\mathbf{u} = -2c\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ortogonal kepada vektor $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3c\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$.
- (b) Diberi bahawa garis ℓ_1 melalui titik-titik $A(1,0,-1)$ and $B(-1,1,0)$ dan garis ℓ_2 melalui titik-titik $P(3,1,-1)$ dan $Q(4,5,-2)$. Dapatkan suatu vektor berserenjang kepada kedua-dua garis ℓ_1 and ℓ_2 .

[12 markah]

2. (a) Let $\mathbf{r}(t) = (3t+1)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ the position vector of a particle moving in space, at time t . Find the angle between the particle's velocity and acceleration at $t = 1$.
- (b) Find parametric equation for the line passes through the point $(2,4,5)$, and perpendicular to the plane $3x + 7y - 5z = 21$.

[10 marks]

2. (a) Biar $\mathbf{r}(t) = (3t+1)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ vektor kedudukan suatu zarah dalam ruang, pada masa t . Dapatkan sudut di antara halaju dan pecutan zarah itu pada $t = 1$.
- (b) Dapatkan persamaan parametrik untuk garis melalui titik $(2,4,5)$, dan berserenjang dengan satah $3x + 7y - 5z = 21$.

[10 markah]

3. (a) Find the points on the ellipsoid $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$, where the tangent plane at the points is parallel to the plane $3x - y + 3z = 1$.
- (b) Given $f(x, y, z) = z(x - y)^5 + xy^2z^3$.
- (i) Find the directional derivative of f at $(1, -2, 1)$ in the direction of the outward normal to the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.
- (ii) In what direction is the directional derivative at $(1, -2, 1)$ largest?
- (c) (i) Find the divergence of the vector field $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x \sin y \mathbf{i} + e^x \cos y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$.
- (ii) Given a force field $\mathbf{F} = -\nabla \phi$, with $\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r}|}$ is the potential function for \mathbf{F} due to a charge q at the origin, where $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$ is the position vector of a point in the field and ϵ_0 is the constant of permittivity of free space. Show that \mathbf{F} is irrotational.

[20 marks]

3. (a) Dapatkan titik-titik pada ellipsoid $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$, yang mana satah tangen pada titik-titik itu selari dengan satah $3x - y + 3z = 1$.
- (b) Diberi $f(x, y, z) = z(x - y)^5 + xy^2z^3$.
- (i) Dapatkan pembezaan terarah bagi f pada $(1, -2, 1)$ dalam arah normal keluar sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.
- (ii) Apakah arah, pembezaan terarah pada $(1, -2, 1)$ adalah terbesar?
- (c) (i) Dapatkan kecapahan suatu medan vektor $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x \sin y \mathbf{i} + e^x \cos y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$.
- (ii) Diberi medan daya $\mathbf{F} = -\nabla \phi$, dengan $\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r}|}$ ialah fungsi potensi untuk \mathbf{F} hasil dari suatu cas q pada asalan, yang mana $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$ ialah vektor kedudukan suatu titik dalam medan dan ϵ_0 ialah pemalar permitiviti ruang bebas. Tunjukkan bahawa F tidak boleh putar.

[20 markah]

4. (a) Consider the vector field $\mathbf{F}(x, y) = 2xy \mathbf{i} + (x^2 - y^2) \mathbf{j}$ and the region R bounded by the curve C consists of $C_1 : y = 0$ and $C_2 : y = 2x - x^2$.
- (i) find the vector equation representing C_1 and C_2 .
 - (ii) hence, evaluate the work done by \mathbf{F} in moving an object along C .
- (b) Show that $\mathbf{F}(x, y, z) = e^y \mathbf{i} + (xe^y + e^z) \mathbf{j} + ye^z \mathbf{k}$ is a conservative vector field. Evaluate the line integral $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ along the line segment from the point $(0, 2, 0)$ to $(4, 0, 3)$ if the potential function for \mathbf{F} is $f(x, y, z) = xe^y + ye^z$.

[13 marks]

4. (a) *Pertimbangkan medan vektor $\mathbf{F}(x, y) = 2xy \mathbf{i} + (x^2 - y^2) \mathbf{j}$ dan kawasan R yang di batasi oleh lengkung C yang terdiri dari $C_1 : y = 0$ dan $C_2 : y = 2x - x^2$.*
- (i) dapatkan persamaan vektor yang mewakili C_1 dan C_2 .*
 - (ii) seterusnya, nilaikan kerja yang dilakukan oleh \mathbf{F} untuk menggerakkan suatu benda sepanjang C .*
- (b) *Tunjukkan bahawa $\mathbf{F}(x, y, z) = e^y \mathbf{i} + (xe^y + e^z) \mathbf{j} + ye^z \mathbf{k}$ ialah suatu medan vektor konservatif. Nilaian kamiran garis $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ sepanjang segmen garis daripada $(0, 2, 0)$ kepada $(4, 0, 3)$ jika fungsi potensi f bagi medan vektor \mathbf{F} ialah $f(x, y, z) = xe^y + ye^z$.*

[13 markah]

5. Let C be a simple closed smooth curve, oriented counter-clockwise, that encloses a simply connected region D in the plane- xy . Let $\mathbf{F} = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$ be a vector is defined on D , with f and g continuous first partial differentiable functions.
- (a) State the Green's theorem for circulation and flux \mathbf{F} .
 - (b) If $f = xy + y^2$, $g = x - y$ and D enclosed by the curves $y = x^2$ and $x = y^2$, sketch the region D and hence set up, but **do not** evaluate, an integral for circulation and flux of \mathbf{F} .

[13 marks]

5. *Biarkan C suatu lengkung sekata tertutup mudah, dalam arah lawan jam yang melengkungi suatu kawasan D terhubung mudah dalam satah- xy . Biarkan $\mathbf{F} = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$ suatu vektor tertakrif dalam D dengan f dan g fungsi-fungsi terbezakan separa peringkat pertama.*
- (a) Nyatakan teorem Green untuk putaran dan fluk \mathbf{F} .*
 - (b) Jika $f = xy + y^2$, $g = x - y$ dan D dilengkungi oleh lengkung $y = x^2$ dan $x = y^2$, lakarkan kawasan D dan seterusnya bentukkan, **tanpa** menilai, suatu kamiran untuk putaran dan fluk \mathbf{F} .*

[13 markah]

6. (a) Let S be the surface $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $1 \leq z \leq 2$. Use parametrization to evaluate the following integral:

$$\iint_S (x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$$

where \mathbf{n} is the unit normal vector pointing inwards towards the z -axis .

- (b) Set up, but **do not** evaluate, an integral for the,
- (i) circulation of the field $\mathbf{F} = x^2y^3\mathbf{i} + \mathbf{j} + z\mathbf{k}$ around C , where C is the intersection of the cylinder $x^2 + y^2 = 4$ and the hemisphere $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \geq 0$, counter-clockwise when viewed from above. Use the Stokes' Theorem for the surface integral.
 - (ii) outward flux of the field $\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ through the surface of the region enclosed by the cylinder $x^2 + y^2 = 1$ and the plane $z = 1$ and $z = -1$. Use the Divergence Theorem.

[16 marks]

6. (a) *Biarkan S suatu permukaan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $1 \leq z \leq 2$. Gunakan kaedah parametrik untuk menilai kamiran berikut*

$$\iint_S (x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$$

yang mana \mathbf{n} ialah unit normal vektor terarah dalam ke arah paksi- z .

- (b) *Bentukkan, tanpa menilai, suatu kamiran untuk*
- (i) *putaran medan vektor $\mathbf{F} = x^2y^3\mathbf{i} + \mathbf{j} + z\mathbf{k}$ sekeliling C , yang mana C ialah persilangan silinder dan hemisfera, arah pusingan lawan jam apabila dilihat dari atas. Gunakan Teorem Stoke untuk kamiran permukaan.*
 - (ii) *fluk keluar medan vektor $\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ melalui permukaan kawasan yang dibatasi oleh selinder $x^2 + y^2 = 1$ dan satah-satah $z = 1$ dan $z = -1$. Gunakan Teorem Divergen.*

[16 markah]

7. (a) A viscous fluid is flowing along a cylindrical pipe of radius R with velocity field $\mathbf{v} = Ce^{-r} \mathbf{k} \text{ (ms}^{-1}\text{)}$; $0 \leq r \leq R$, where \mathbf{k} is the unit vector along the axis of the pipe in the direction of the flow, r is the distance from the axis, and C is a constant. Calculate the flux of the fluid through a cross section of the pipe.
- (b) Gauss' Theorem states that the net charge Q enclosed by a closed surface S is $Q = \epsilon_0 \iiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$, where \mathbf{E} is the electrostatic field. Find the charge contained in the solid upper hemisphere, W of radius 1 if $\mathbf{E} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

[16 marks]

7. (a) *Sejenis cecair pekat mengalir sepanjang paip selinder berjejari R dengan medan halaju $\mathbf{v} = Ce^{-r} \mathbf{k} \text{ (ms}^{-1}\text{)}$: $0 \leq r \leq R$, yang mana \mathbf{k} ialah unit vektor sepanjang paksi paip dalam arah pengaliran, r ialah jarak dari paksi, dan C ialah suatu pemalar. Hitung fluk cecair tersebut melalui kawasan rentas paip itu.*
- (b) *Teorem Gauss menyatakan bahawa nilai bersih cas Q yang dilitupi oleh permukaan tertutup S ialah $Q = \epsilon_0 \iiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$, yang mana \mathbf{E} ialah medan electrostatik. Dapatkan cas yang terkandung dalam pepejal hemisfera bahagian atas, W berjejari 1 jika $\mathbf{E} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.*

[16 markah]