UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2006/2007

April 2007

MSG 389 – PENGIRAAN KEJURUTERAAN II

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **ENAM** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **semua tiga** soalan.

...2/-

1. (a) Satu kolam untuk merawat air kumbahan mempunyai dimensi berikut: lebar = 25 m, panjang = 150 m, kedalaman air = 3 m. Air kumbahan dengan kepekatan BOD 0.05 kg/ m^3 dan kadar aliran Q = 0.02 m^3/s, masuk kolam ini pada hujung hulu A dan keluar 150 m kemudian pada hujung hilir B. BOD ini merosot pada kadar $k = 1.0 \times 10^{-4}\ s^{-1}$. Untuk tujuan analisis, kolam ini dibahagikan kepada lima (5) segmen seragam supaya setiap segmen mempunyai panjang DX = 30 m. Dianggapkan bahawa kadar sebaran ialah 0.0 m^2/s bagi kolam ini.

   (i) Bentukkan dan selesaikan sistem persamaan aljabar untuk mendapatkan kepekatan BOD di dalam setiap 5 segmen apabila keadaan mantap tercapai.

   (ii) Sekarang bahagikan segmen pertama terdekat hujung A kepada tiga (3) segmen seragam supaya setiap segmen mempunyai panjang DX = 10 m. Segmen lain dikekalkan. Bentukkan dan selesaikan sistem (7x7) sekarang untuk mendapatkan kepekatan dalam setiap 7 segmen.

   (iii) Lakarkan kepekatan bagi bahagian (i) dan (ii) dalam satu rajah yang sama. Cadangkan kaedah untuk mendapatkan penyelesaian yang lebih jitu. Berikan satu contoh.

   (iv) Bentukkan satu sistem persamaan pembezaan 2x2 dalam masa untuk kepekatan $c_1(t)$ dan $c_2(t)$ pada dua segmen pertama yang terdekat hujung hulu A bagi sistem 7 segmen di bahagian (ii). Selesaikan untuk mendapatkan kepekatan $c_1(t)$, dan $c_2(t)$ jika kepekatan awal masing-masing ialah 0.0 kg/m^3. Lakarkan $c_1(t)$, dan $c_2(t)$ dalam satu rajah yang sama sehingga t menuju ke infiniti. Adakah $c_1(t)$ dan $c_2(t)$ akan menuju ke nilai masing-masing di bahagian (ii) di atas dan berikan sebabnya.

   (v) Terbitkan persamaan parabolik yang merupakan suatu persamaan pembezaan separa aliran-sebaran untuk kepekatan kolam ini:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = E\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - u\frac{\partial c}{\partial x} - kc + W \tag{1}$$

   di mana unit-unit asas ialah meter (m), saat (s) dan kilogram (kg). Berikan makna, nilai dan unit untuk setiap sebutan, berdasarkan bahagian (i).

   (vi) Merujuk kepada (i), tuliskan sistem aljabar (5x5) $A\underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{w}$ melalui simbol-simbol E, u, k, W dan Q yang digunakan dalam persamaan (1).

(b) Pertimbangkan masalah nilai awal $\frac{\partial y}{\partial x} = f(x, y)$, $y(0) = y_0$. Kita ingin terbitkan rumus bagi Kaedah Runge-Kutta Peringkat Dua RK2 dalam bentuk

$$y_{n+1} = y_n + ak_1 + bk_2$$
$$k_1 = h\,f(x_n, y_n)$$
$$k_2 = h\,f(x_n + \alpha h, y_n + \beta k_1)$$

...3/-

Melalui perkembangan Siri Taylor peringkat dua, tunjukkan bahawa

$$a+b=1,\quad \alpha b=\frac{1}{2},\quad \beta b=\frac{1}{2}.$$

Sekarang pilih $a=\frac{1}{2}$, dan dapatkan RK2.

Cadangkan suatu skema untuk menerbitkan Kaedah Runge-Kutta Peringkat Empat RK4.

[100 markah]

2. (a) Diberi satu sistem persamaan pembezaan biasa

$$\frac{\partial x}{\partial t}=x+y \quad , \quad x(0)=2$$
$$\frac{\partial y}{\partial t}=4x+y \quad , \quad y(0)=3 \tag{2}$$

(i) Tuliskan sistem di atas dalam bentuk matriks. Dapatkan nilai eigen dan vektor eigen bagi matriks ini dan seterusnya terbitkan penyelesaian analisis

$$x=\frac{7}{4}e^{3t}+\frac{1}{4}e^{-t},\quad y=\frac{7}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^{-t}.$$

Melalui penyelesaian analisis di atas, kembangkan x dan y dalam polinomial Taylor x_3 dan y_3 masing-masing sehingga sebutan kuasa tiga dengan memberikan sebutan ralat. Dapatkan nilai $x(1.0)$, $y(1.0)$, $x_3(1.0)$ dan $y_3(1.0)$ dan bincangkan ralatnya.

(ii) Dengan menggunakan sistem persamaan pembezaan (2) di atas, bentukkan polinomial Taylor peringkat 3 iaitu x_p , y_p bagi x dan y masing-masing. Seterusnya cari $x_p(0.1)$ dan $y_p(0.1)$ dan berikan ralatnya. Adakah polinomial Taylor x_p , y_p ini sama dengan x_3 dan y_3 yang terdapat di bahagian (i) ? Terangkan sebab-sebabnya.

(iii) Gunakan kaedah Euler dan Euler-ubahsuai untuk mencari $x(0.1)$ dan $y(0.1)$ dan berikan ralatnya.

(iv) Bandingkan dan bincangkan kejituan ketiga-tiga kaedah di bahagian atas.

...4/-

(b) Andaikan suatu matriks A mempunyai nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ dengan vektor eigen $\underline{v}^1, \underline{v}^2, \ldots, \underline{v}^n$ yang bersandar linear. Maka pasangan $(\lambda_i, \underline{v}^i)$ dipanggil pasangan eigen bagi A jika

$$A\underline{v}^i = \lambda_i \underline{v}^i.$$

Bagi satu vektor $\underline{x}$, kita ada

$$\underline{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v^j .$$

(i) Andaikan $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| > \ldots \geq |\lambda_n|$.
Tunjukkan bahawa

$$A^k \underline{x} = \lambda_1^k \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right)^k \underline{v}^j$$

(ii) Tunjukkan bahawa jika $(\lambda, \underline{v})$ ialah satu pasangan eigen bagi A, maka $\left(\frac{1}{\lambda}, \underline{v} \right)$ ialah satu pasangan eigen bagi A^{-1}.

(iii) Cari nilai eigen dominan dan vektor eigennya bagi

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

dengan Kaedah Kuasa.

Mulakan dengan vektor awal (0, 1, 2) dan jalankan 3 lelaran. Adakah lelaran ini akan menumpu dan terangkan sebabnya. Cari juga nilai eigen terkecil dan vektor eigennya, jika songsang bagi A ialah

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/8 & 0 & -1/8 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ -1/8 & 0 & 3/8 \end{pmatrix}.$$

(iv) Buktikan bahawa kaedah ini akan semakin menumpu ke nilai eigen dominan. Anda boleh gunakan hasil daripada (i) di atas.

[100 markah]

3. (a) Pertimbangkan persamaan haba berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0,1), \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = \sin(\pi x), \quad x \in [0,1].$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0$$

(i) Terbitkan persamaan haba di atas dengan keterangan jelas.
Biarkan

$$U_{i,j} = U(x_i, t_j), \quad i = 1,\ldots,m; \quad j = 1,2,3,\ldots$$

$$k = \Delta t, \quad h = \Delta x, \quad r = \frac{k}{h^2}.$$

(ii) Terbitkan skema kaedah beza ke depan (eksplisit)

$$U_{i,j+1} = r \quad U_{i-1,j} + (1-2r)\, U_{i,j} + r \quad U_{i+1,j} \qquad (3)$$

(iii) Terbitkan skema kaedah beza ke belakang (implisit)

$$-r \quad U_{i-1,j+1} + (1+2r) U_{i,j+1} - r \; U_{i+1,j+1} = U_{i,j} \qquad (4)$$

(iv) Gunakan skema (3) di bahagian (ii) dengan k =0.03, h = 0.25 dan r = 0.48 untuk mencari U pada $t = 0.03$. Terbitkan ralatnya.

(v) Gunakan skema (4) di bahagian (iii) dengan k =0.03, h = 0.25 dan r = 0.48 untuk mencari U pada $t = 0.03$. Terbitkan ralatnya.

(vi) Bincangkan dengan jelas kestabilan dan kejituan skema (iv) dan (v).

(vii) Sahkan bahawa u(x, t) = $\sin(\pi x) . \exp(-\pi^2 t)$. Apakah suhu u(x) apabila t $\rightarrow \infty$?

(b) Pertimbangkan persamaan gelombang

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (5)$$

$$y(x,0) = f(x) \qquad (6)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = p(x) \qquad (7)$$

...6/-

(i) Tunjukkan bahawa

$$y(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$$

ialah satu penyelesaian untuk (5), bagi sebarang fungsi F dan G.

(ii) Tunjukkan bahawa

$$y(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} p(v)\,dv \tag{8}$$

ialah penyelesaian untuk (5) dengan syarat awal (6) dan (7).

(c) Andaikan

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{10}$$

di mana u m/s ialah halaju dan η m paras air di atas paras purata, g m/s^2 graviti dan h m kedalaman air purata.

(i) Tunjukkan bahawa η dan u masing-masingnya memenuhi persamaan gelombang

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gh\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}. \tag{11}$$

(ii) Jika g = 10 m/s^2, h = 1000 m, apakah nilai dan unit untuk $\sqrt{gh} = c$?

(iii) Andaikan satu tsunami berlaku di laut dengan g = 10 m/s^2, h = 1000 m. Pada masa awal t = 0, syarat awal ialah p(x) = 0 dari (7) untuk semua x, dan f(x) dari (6) diberikan oleh fungsi berikut, di mana x diukur dalam *km*.

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{\pi x}{10}\right), & x \in (0,10) \\ 0, & \text{tempat lain} \end{cases} \tag{12}$$

Dapatkan $\eta(x,t)$ dan lakarkannya pada masa t= 1 jam, 2 jam kemudian pada rajah yang sama. Anda boleh gunakan rumus (8).

[100 markah]

-ooo0ooo-