UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
2013/2014 Sidang Akademik

December 2013 / January 2014

MSS 302 - Real Analysis
[Analisis Nyata]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of FOUR pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all five** [5] questions.

*[Arahan: Jawab **semua lima** [5] soalan.]*

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai.]

1. For each of the following statement, prove it if it is true or give a counterexample if it is false.

   (a) Any set S containing an uncountable set T is uncountable.
   (b) An uncountable set always has positive measure.
   (c) If $f \in L^0$, then $f \in L^1$.
   (d) If $|f|$ is Riemann integrable, then f is Riemann integrable.
   (e) If f is Lebesgue integrable, then f^2 is Lebesgue integrable.
   (f) If f is measurable, then f^2 is measurable.
   (g) If the set $A \cup B$ is measurable, then both sets A and B are measurable.

[42 marks]

1. Untuk setiap pernyataan berikut, buktikan jika benar atau berikan contoh lawan jika palsu.

   (a) Sebarang set S mengandungi set tak terbilangkan T adalah tak terbilangkan.
   (b) Set tak terbilangkan sentiasa mempunyai sukatan positif.
   (c) Jika $f \in L^0$, maka $f \in L^1$.
   (d) Jika $|f|$ terkamirkan secara Riemann, maka f terkamirkan secara Riemann.
   (e) Jika f terkamirkan secara Lebesgue, maka f^2 terkamirkan secara Lebesgue.
   (f) Jika f tersukatkan, maka f^2 tersukatkan.
   (g) Jika set $A \cup B$ tersukatkan, maka kedua-dua set A and B tersukatkan.

[42 markah]

2. (a) Express the step functions $f = 4 \cdot \chi_{[0,3)} + 2 \cdot \chi_{[1,2]} - 1 \cdot \chi_{(2,3)}$ and $g = 2 \cdot \chi_{[0,2)} - 4 \cdot \chi_{[1,3]}$ using representations that involve only disjoint intervals. Then find the value of $\int (6f - 3g)$.
   (b) Give the definition of a zero measure set. Then use it to show that the set $S = \{1, 2, 10\}$ has measure zero.

[15 marks]

2. (a) Ungkapkan fungsi-fungsi langkah $f = 4 \cdot \chi_{[0,3)} + 2 \cdot \chi_{[1,2]} - 1 \cdot \chi_{(2,3)}$ *dan* $g = 2 \cdot \chi_{[0,2)} - 4 \cdot \chi_{[1,3]}$ *dengan perwakilan yang melibatkan selang-selang tak bercantum. Kemudian cari nilai* $\int (6f - 3g)$.
   (b) Beri takrif untuk set sukatan sifar. Kemudian gunakannya untuk menunjukkan bahawa set $S = \{1, 2, 10\}$ *mempunyai sukatan sifar.*

[15 markah]

3. For real numbers $x > 0$, the *gamma function* Γ is defined by

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

   (a) By using a suitable **theorem of convergence**, show that $\Gamma(1) = 1$.
   (b) Use integration by parts to show that $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ for $x > 0$.
   (c) By using parts (a) and (b), prove that $\Gamma(n) = (n-1)!$ for all $n \in \mathbb{N}$, where $a!$ denote the factorial of a.

[15 marks]

3. Untuk nombor nyata $x > 0$, fungsi gama Γ *ditakrifkan sebagai*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

   (a) Dengan menggunakan ***teorem penumpuan*** *yang sesuai, tunjukkan bahawa* $\Gamma(1) = 1$.
   (b) Gunakan pengamiran bahagian demi bahagian untuk menunjukkan bahawa $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ *untuk* $x > 0$.
   (c) Dengan menggunakan bahagian (a) dan (b), buktikan bahawa $\Gamma(n) = (n-1)!$ *untuk semua* $n \in \mathbb{N}$, *dengan* $a!$ *menandakan faktorial untuk* a.

[15 markah]

4. (a) Suppose that $|f| < g$, where f is measurable and g is Lebesgue integrable. Show that f is Lebesgue integrable.
   (b) Show that for any functions f and g in L^2,
$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2.$$
   (c) Prove that $f_n(x) = \frac{x}{n}$ is an $L^2[0,1]$-function. Then show that $\{f_n\}$ is a Cauchy sequence that converges to $f \equiv 0$ in L^1-norm.

[15 marks]

4. (a) Andaikan $|f| < g$, dengan f tersukatkan dan g terkamirkan secara Lebesgue. Tunjukkan bahawa f terkamirkan secara Lebesgue.
   (b) Tunjukkan bahawa sebarang fungsi f dan g dalam L^2,
$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2.$$
   (c) Buktikan bahawa $f_n(x) = \frac{x}{n}$ ialah fungsi $L^2[0,1]$. Kemudian tunjukkan bahawa $\{f_n\}$ jujukan Cauchy yang menumpu ke $f \equiv 0$ dalam L^1-norm.

[15 markah]

5. (a) Show that the function $\omega(x) = e^{-x}\chi_{(0,\infty)}(x)$ is in $L^2(\mathbb{R})$.
   (b) For the Radon-Nikodym derivative weight function $\omega(x) = e^{-x}\chi_{(0,\infty)}(x)$, show that $\int \chi_{[a,b]}\omega(x)\,dx = e^{-a} - e^{-b}$, for a, b in $(0,\infty)$.

[15 marks]

5. (a) Tunjukkan bahawa fungsi $\omega(x) = e^{-x}\chi_{(0,\infty)}(x)$ adalah dalam $L^2(\mathbb{R})$.
   (b) Untuk fungsi pemberat terbitan Radon-Nikodym $\omega(x) = e^{-x}\chi_{(0,\infty)}(x)$, tunjukkan bahawa $\int \chi_{[a,b]}\omega(x)\,dx = e^{-a} - e^{-b}$ untuk a, b in $(0,\infty)$.

[15 markah]

- ooo O ooo -