

---

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination  
2013/2014 Academic Session

January 2014

**MAT 111 – Linear Algebra**  
***[Aljabar Linear]***

Duration : 3 hours  
*[Masa : 3 jam]*

---

Please check that this examination paper consists of NINE pages of printed materials before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi SEMBILAN muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

**Instructions:** Answer **all four** [4] questions.

**Arahan:** Jawab **semua empat** [4] soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

*[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].*

1. Let the matrix  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ .

- (a) Find an equation relating  $a, b, c$  and  $d$  so that the linear system  $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$  is consistent.
- (b) Based on your result in part (a), find  $\text{rank} [A \ \vdots \ \mathbf{b}]$  when  $\mathbf{b}$  belongs to the column space of  $A$ .
- (c) Determine the solution to the linear system  $A\mathbf{x} = [1 \ 1 \ 2 \ 5]^T$ , and write it in the form  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$ , where  $\mathbf{x}_p$  is a particular solution to the given non-homogeneous system, and  $\mathbf{x}_h$  is a solution to the associated homogeneous system,  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .
- (d) Find the reduced row echelon form of  $A$ .
- (e) Use the result from parts (c) or (d) or any other method to prove or disprove that  $A$  is non-singular.
- (f) Based on your result in parts (c) and (d), find the bases for the null space and the column space of  $A$ .
- (g) Show that the null space of  $A^T$  is the orthogonal complement of the column space of  $A$  in part (f).

[100 marks]

1. Andaikan matriks  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ .

(a) Cari suatu persamaan yang menghubungkan  $a$ ,  $b$ ,  $c$  dan  $d$  supaya sistem

linear  $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$  adalah konsisten.

(b) Berdasarkan kepada keputusan yang kamu perolehi dalam bahagian (a), cari pangkat  $[A \ \vdots \ \mathbf{b}]$  apabila  $\mathbf{b}$  adalah ahli ruang lajur bagi  $A$ .

(c) Tentukan penyelesaian kepada sistem linear  $A\mathbf{x} = [1 \ 1 \ 2 \ 5]^T$ , dan tulis penyelesaian tersebut dalam bentuk  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$ , dengan  $\mathbf{x}_p$  adalah suatu penyelesaian khusus kepada sistem tak homogen yang diberikan, dan  $\mathbf{x}_h$  adalah suatu penyelesaian kepada sistem homogen sekutu,  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

(d) Tentukan bentuk eselon baris terturun bagi  $A$ .

(e) Guna keputusan daripada bahagian (c) atau bahagian (d) atau sebarang kaedah lain untuk membuktikan atau menyangkal bahawa  $A$  adalah tak singular.

(f) Berdasarkan kepada keputusan yang kamu perolehi dalam bahagian (c) dan bahagian (d), cari asas-asas untuk ruang nol dan ruang lajur bagi  $A$ .

(g) Tunjukkan bahawa ruang nol bagi  $A^T$  adalah pelengkap ortogon ruang lajur bagi  $A$  dalam bahagian (f).

[100 markah]

2. (a) Let  $V$  be an  $n$ -dimensional vector space and  $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n\}$  a basis for

$V$ .  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow V$  is defined as follows: If  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$  is a vector in  $\mathbb{R}^n$ ,

$$L(\mathbf{u}) = u_1 \mathbf{w}_1 + u_2 \mathbf{w}_2 + \dots + u_n \mathbf{w}_n.$$

(i) Show that  $L(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = aL(\mathbf{u}) + bL(\mathbf{v})$  for any real numbers  $a, b$  and any vectors  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  in  $\mathbb{R}^n$ .

(ii) Find the kernel of  $L$ .

(iii) Show that  $L$  is one-to-one and onto.

(iv) Is  $L$  invertible? If it is, show that the image of a basis for  $\mathbb{R}^n$  under  $L$  is a basis for  $V$ .

(b) Let  $A \in M_m$ , the set of all  $n \times n$  matrices.

(i) Show that  $\det(A^T A) \geq 0$ .

(ii) Prove or disprove that for  $n \geq 2$ , the determinant function  $L: M_m \rightarrow \mathbb{R}$  defined by  $L(A) = \det(A)$ , is a linear transformation.

(c) Let  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  and  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

(i) Show that  $\mathbf{x}$  and  $\mathbf{y}$  are orthogonal. Then, find a non-zero vector  $\mathbf{z}$  orthogonal to both  $\mathbf{x}$  and  $\mathbf{y}$ .

(ii) Let  $A = [\mathbf{x} \ \mathbf{y} \ \mathbf{z}]$ . Compute  $A^T A$ . Then, describe the resulting matrix and explain the meaning of each of its entries.

(iii) Use the information from parts (i) and (ii) to form an orthogonal matrix related to  $A$ .

(iv) Prove that if  $A$  is a  $3 \times 3$  matrix whose columns are mutually orthogonal, then  $A^T A$  is a diagonal matrix.

[100 marks]

2. (a) Andaikan  $V$  adalah suatu ruang vektor berdimensi  $n$  dan  $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n\}$  adalah suatu asas untuk  $V$ .  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow V$  ditakrifkan

seperti berikut: Jika  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$  adalah suatu vektor dalam  $\mathbb{R}^n$ ,

$$L(\mathbf{u}) = u_1\mathbf{w}_1 + u_2\mathbf{w}_2 + \dots + u_n\mathbf{w}_n.$$

- (i) Tunjukkan bahawa  $L(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = aL(\mathbf{u}) + bL(\mathbf{v})$  untuk sebarang nombor nyata  $a, b$  dan sebarang vektor  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  dalam  $\mathbb{R}^n$ .
- (ii) Cari inti bagi  $L$ .
- (iii) Tunjukkan bahawa  $L$  adalah satu dengan satu dan keseluruhan.
- (iv) Adakah  $L$  tersongsangkan? Jika ya, tunjukkan bahawa imej suatu asas untuk  $\mathbb{R}^n$  di bawah  $L$  adalah suatu asas untuk  $V$ .

- (b) Andaikan  $A \in M_m$ , set kesemua matriks  $n \times n$ .

- (i) Tunjukkan bahawa  $\det(A^T A) \geq 0$ .
- (ii) Bukti atau sangkal bahawa untuk  $n \geq 2$ , fungsi penentu  $L: M_n \rightarrow \mathbb{R}$  yang ditakrif oleh  $L(A) = \det(A)$ , adalah suatu transformasi linear.

(c) Andaikan  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  dan  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

- (i) Tunjukkan bahawa  $\mathbf{x}$  dan  $\mathbf{y}$  adalah berortogon. Seterusnya, cari suatu vektor tak sifar  $\mathbf{z}$  yang berortogon kepada kedua-dua  $\mathbf{x}$  dan  $\mathbf{y}$ .
- (ii) Andaikan  $A = [\mathbf{x} \ \mathbf{y} \ \mathbf{z}]$ . Kira  $A^T A$ . Seterusnya, terangkan matriks yang dihasilkan dan jelaskan maksud setiap pemasukannya.
- (iii) Guna maklumat daripada bahagian (i) dan bahagian (ii) untuk membentuk matriks ortogon terhubung kepada  $A$ .
- (iv) Buktikan bahawa jika  $A$  adalah suatu matriks  $3 \times 3$  yang lajur-lajurnya adalah saling berortogon, maka  $A^T A$  adalah suatu matriks pepenjuru.

[100 markah]

3. (a) Let  $P_2$  be the set of all polynomials of degree  $\leq 2$  together with the zero polynomial. Let  $L: P_2 \rightarrow P_2$  be the linear operator defined by  $L(at^2 + bt + c) = at^2 - bt$ , where  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .
- (i) Find the matrix  $A$  that represents  $L$  with respect to the basis  $S = \{t^2 + 1, t, 1\}$  for  $P_2$ .
- (ii) Find the characteristic polynomial of  $A$  in part (i).
- (iii) Find the eigenvalues and associated eigenvectors of  $L$ .
- (b) Let  $V$  be a real vector space where  $\mathbf{u}$  and  $\mathbf{v}$  are any vectors in  $V$  such that  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  is defined as an inner product on  $V$ . If  $\mathbf{w}$  is a fixed vector in  $V$ , prove that the set of all vectors that are orthogonal to  $\mathbf{w}$  is a subspace of  $V$ .

[100 marks]

3. (a) *Andaikan  $P_2$  adalah set kesemua polinomial berdarjah  $\leq 2$  berserta dengan polinomial sifar. Andaikan  $L: P_2 \rightarrow P_2$  adalah pengoperasi linear yang ditakrifkan oleh  $L(at^2 + bt + c) = at^2 - bt$ , dengan  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .*
- (i) *Cari matriks  $A$  yang mewakili  $L$  terhadap asas  $S = \{t^2 + 1, t, 1\}$  untuk  $P_2$ .*
- (ii) *Cari polinomial cirian bagi  $A$  dalam bahagian (i).*
- (iii) *Cari nilai eigen dan vektor eigen sekutuan bagi  $L$ .*
- (b) *Andaikan  $V$  adalah suatu ruang vektor nyata dengan  $\mathbf{u}$  dan  $\mathbf{v}$  adalah sebarang vektor dalam  $V$  sedemikian rupa  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  ditakrifkan sebagai hasil darab terkedalam pada  $V$ . Jika  $\mathbf{w}$  adalah suatu vektor tetap dalam  $V$ , buktikan bahawa set kesemua vektor yang berortogon dengan  $\mathbf{w}$  adalah suatu subruang bagi  $V$ .*

[100 markah]

4. (a) Let  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  be the matrix transformation defined by  $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ , where  $h$  and  $k$  are both non-zero. Using the points  $(\cos \theta, \sin \theta)$  on the circumference of the unit circle, show that the image of the unit circle by  $f$  is an ellipse centred at the origin.

(b) Let  $W$  be the subspace of the Euclidean space  $\mathbb{R}^4$  with basis  $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$  and the standard inner product (dot product) defined on it.

- (i) Show that  $S$  is a linearly independent set in  $\mathbb{R}^4$ .
- (ii) Use the Gram-Schmidt process to determine an orthonormal basis for  $W$ .

(c) Find the  $QR$ -factorization of  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

[100 marks]

4. (a) Andaikan  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  adalah transformasi matriks yang ditakrifkan oleh  $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ , dengan  $h$  dan  $k$  kedua-duanya tak sifar. Dengan menggunakan titik  $(\cos \theta, \sin \theta)$  pada lilitan bulatan unit, tunjukkan bahawa imej bulatan unit oleh  $f$  adalah suatu elips yang berpusat pada asalan.

(b) Andaikan  $W$  adalah subruang bagi ruang Euklidan  $\mathbb{R}^4$  dengan asas  $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$  dan hasil darab terkedalam piawai (hasil darab bintik) ditakrifkan padanya.

- (i) Tunjukkan bahawa  $S$  adalah suatu set yang tak bersandar secara linear dalam  $\mathbb{R}^4$ .
- (ii) Guna proses Gram-Schmidt untuk menentukan suatu asas ortonormal untuk  $W$ .

(c) Dapatkan pemfaktoran- $QR$  bagi  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

[100 markah]