UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination
2013/2014 Academic Session

December 2013 / January 2014

MAT 111 – Linear Algebra
[Aljabar Linear]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of EIGHT pages of printed materials before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LAPAN muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all four** [4] questions.

*[**Arahan**: Jawab **semua empat** [4] soalan.]*

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

1. Let the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Find an equation relating a, b, c and d so that the linear system $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ is consistent.

(b) Based on your result in part (a), find rank $\left[A \;\vdots\; \mathbf{b}\right]$ when $\mathbf{b}$ belongs to the column space of A.

(c) Determine the solution to the linear system $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}^T$, and write it in the form $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$, where $\mathbf{x}_p$ is a particular solution to the given non-homogeneous system, and $\mathbf{x}_h$ is a solution to the associated homogeneous system, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(d) Find the reduced row echelon form of A.

(e) Use the result from parts (c) or (d) or any other method to prove or disprove that A is non-singular.

(f) Based on your result in parts (c) and (d), find the bases for the null space and the column space of A.

(g) Show that the null space of A^T is the orthogonal complement of the column space of A in part (f).

[100 marks]

1. *Andaikan matriks* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) *Cari suatu persamaan yang menghubungkan a, b, c dan d supaya sistem linear* $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ *adalah konsisten.*

(b) *Berdasarkan kepada keputusan yang kamu perolehi dalam bahagian (a), cari pangkat* $[A \ \vdots \ \mathbf{b}]$ *apabila* ***b*** *adalah ahli ruang lajur bagi A.*

(c) *Tentukan penyelesaian kepada sistem linear* $A\mathbf{x} = [1 \ \ 1 \ \ 2 \ \ 5]^T$, *dan tulis penyelesaian tersebut dalam bentuk* $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$, *dengan* $\mathbf{x}_p$ *adalah suatu penyelesaian khusus kepada sistem tak homogen yang diberikan, dan* $\mathbf{x}_h$ *adalah suatu penyelesaian kepada sistem homogen sekutu,* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(d) *Tentukan bentuk eselon baris terturun bagi A.*

(e) *Guna keputusan daripada bahagian (c) atau bahagian (d) atau sebarang kaedah lain untuk membuktikan atau menyangkal bahawa A adalah tak singular.*

(f) *Berdasarkan kepada keputusan yang kamu perolehi dalam bahagian (c) dan bahagian (d), cari asas-asas untuk ruang nol dan ruang lajur bagi A.*

(g) *Tunjukkan bahawa ruang nol bagi* A^T *adalah pelengkap ortogon ruang lajur bagi A dalam bahagian (f).*

[100 markah]

2. (a) Let V be an n-dimensional vector space and $S=\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\dots,\mathbf{w}_n\}$ a basis for V. $L:\mathbb{R}^n\to V$ is defined as follows: If $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{bmatrix}$ is a vector in $\mathbb{R}^n$, $L(\mathbf{u})=u_1\mathbf{w}_1+u_2\mathbf{w}_2+\cdots+u_n\mathbf{w}_n$.

(i) Show that $L(a\mathbf{u}+b\mathbf{v})=aL(\mathbf{u})+bL(\mathbf{v})$ for any real numbers a,b and any vectors $\mathbf{u},\mathbf{v}$ in $\mathbb{R}^n$.

(ii) Find the kernel of L.

(iii) Show that L is one-to-one and onto.

(iv) Is L invertible? If it is, show that the image of a basis for $\mathbb{R}^n$ under L is a basis for V.

(b) Let $A\in M_{nn}$, the set of all $n\times n$ matrices.

(i) Show that $\det(A^TA)\geq 0$.

(ii) Prove or disprove that for $n\geq 2$, the determinant function $L:M_{nn}\to\mathbb{R}$ defined by $L(A)=\det(A)$, is a linear transformation.

(c) Let $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}$ and $\mathbf{y}=\begin{bmatrix}-3\\-3\\0\end{bmatrix}$.

(i) Show that $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ are orthogonal. Then, find a non-zero vector $\mathbf{z}$ orthogonal to both $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$.

(ii) Let $A=[\mathbf{x}\quad\mathbf{y}\quad\mathbf{z}]$. Compute A^TA. Then, describe the resulting matrix and explain the meaning of each of its entries.

(iii) Use the information from parts (i) and (ii) to form an orthogonal matrix related to A.

(iv) Prove that if A is a 3×3 matrix whose columns are mutually orthogonal, then A^TA is a diagonal matrix.

[100 marks]

2. (a) *Andaikan V adalah suatu ruang vektor berdimensi n dan* $S=\{\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\ldots,\boldsymbol{w}_n\}$ *adalah suatu asas untuk V.* $L:\mathbb{R}^n\rightarrow V$ *ditakrifkan seperti berikut: Jika* $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{bmatrix}$ *adalah suatu vektor dalam* $\mathbb{R}^n$,

$L(\boldsymbol{u})=u_1\boldsymbol{w}_1+u_2\boldsymbol{w}_2+\cdots+u_n\boldsymbol{w}_n.$

(i) *Tunjukkan bahawa* $L(a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v})=aL(\boldsymbol{u})+bL(\boldsymbol{v})$ *untuk sebarang nombor nyata* a,b *dan sebarang vektor* $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ *dalam* $\mathbb{R}^n$.

(ii) *Cari inti bagi L.*

(iii) *Tunjukkan bahawa L adalah satu dengan satu dan keseluruh.*

(iv) *Adakah L tersongsangkan? Jika ya, tunjukkan bahawa imej suatu asas untuk* $\mathbb{R}^n$ *di bawah L adalah suatu asas untuk V.*

(b) *Andaikan* $A\in M_{nn}$, *set kesemua matriks* $n\times n$.

(i) *Tunjukkan bahawa* $det(A^TA)\geq 0$.

(ii) *Bukti atau sangkal bahawa untuk* $n\geq 2$, *fungsi penentu* $L:M_{nn}\rightarrow\mathbb{R}$ *yang ditakrif oleh* $L(A)=det(A)$, *adalah suatu transformasi linear.*

(c) *Andaikan* $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}$ *dan* $\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}-3\\-3\\0\end{bmatrix}$.

(i) *Tunjukkan bahawa* **x** *dan* **y** *adalah berortogon. Seterusnya, cari suatu vektor tak sifar* **z** *yang berortogon kepada kedua-dua* **x** *dan* **y**.

(ii) *Andaikan* $A=[\boldsymbol{x}\quad\boldsymbol{y}\quad\boldsymbol{z}]$. *Kira* A^TA. *Seterusnya, terangkan matriks yang dihasilkan dan jelaskan maksud setiap pemasukannya.*

(iii) *Guna maklumat daripada bahagian (i) dan bahagian (ii) untuk membentuk matriks ortogon terhubung kepada A.*

(iv) *Buktikan bahawa jika A adalah suatu matriks* 3×3 *yang lajur-lajurnya adalah saling berortogon, maka* A^TA *adalah suatu matriks pepenjuru.*

[100 markah]

3. (a) Let P_2 be the set of all polynomials of degree ≤ 2 together with the zero polynomial. Let $L: P_2 \rightarrow P_2$ be the linear operator defined by $L(at^2 + bt + c) = at^2 - bt,$ where $a, b, c \in \mathbb{R}$.

   (i) Find the matrix A that represents L with respect to the basis $S = \left\{t^2 + 1, t, 1\right\}$ for P_2.

   (ii) Find the characteristic polynomial of A in part (i).

   (iii) Find the eigenvalues and associated eigenvectors of L.

   (b) Let V be a real vector space where **u** and **v** are any vectors in V such that $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ is defined as an inner product on V. If **w** is a fixed vector in V, prove that the set of all vectors that are orthogonal to **w** is a subspace of V.

[100 marks]

3. (a) Andaikan P_2 adalah set kesemua polinomial berdarjah ≤ 2 berserta dengan polinomial sifar. Andaikan $L: P_2 \rightarrow P_2$ adalah pengoperasi linear yang ditakrifkan oleh $L(at^2 + bt + c) = at^2 - bt,$ dengan $a, b, c \in \mathbb{R}$.

   (i) Cari matriks A yang mewakili L terhadap asas $S = \left\{t^2 + 1, t, 1\right\}$ untuk P_2.

   (ii) Cari polinomial cirian bagi A dalam bahagian (i).

   (iii) Cari nilai eigen dan vektor eigen sekutuan bagi L.

   *(b) Andaikan V adalah suatu ruang vektor nyata dengan **u** dan **v** adalah sebarang vektor dalam V sedemikian rupa $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ ditakrifkan sebagai hasil darab terkedalam pada V. Jika **w** adalah suatu vektor tetap dalam V, buktikan bahawa set kesemua vektor yang berortogon dengan **w** adalah suatu subruang bagi V.*

[100 markah]

4. (a) Let $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ be the matrix transformation defined by $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, where h and k are both non-zero. Using the points $(\cos\theta, \sin\theta)$ on the circumference of the unit circle, show that the image of the unit circle by f is an ellipse centred at the origin.

(b) Let W be the subspace of the Euclidean space $\mathbb{R}^4$ with basis $S = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ and the standard inner product (dot product) defined on it.

(i) Show that S is a linearly independent set in $\mathbb{R}^4$.

(ii) Use the Gram-Schmidt process to determine an orthonormal basis for W.

(c) Find the QR-factorization of $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

[100 marks]

4. (a) *Andaikan* $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *adalah transformasi matriks yang ditakrifkan oleh* $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, *dengan* h *dan* k *kedua-duanya tak sifar. Dengan menggunakan titik* $(\cos\theta, \sin\theta)$ *pada lilitan bulatan unit, tunjukkan bahawa imej bulatan unit oleh* f *adalah suatu elips yang berpusat pada asalan.*

(b) *Andaikan* W *adalah subruang bagi ruang Euklidan* $\mathbb{R}^4$ *dengan asas* $S = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ *dan hasil darab terkedalam piawai (hasil darab bintik) ditakrifkan padanya.*

(i) *Tunjukkan bahawa* S *adalah suatu set yang tak bersandar secara linear dalam* $\mathbb{R}^4$.

(ii) *Guna proses Gram-Schmidt untuk menentukan suatu asas ortonormal untuk* W.

(c) *Dapatkan pemfaktoran-QR bagi* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

[100 markah]

- ooo O ooo -