UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
2014/2015 Academic Session

June 2015

MAT 202 - Introduction to Analysis
[Pengantar Analisis]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of FOUR pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **THREE** (3) questions.

*[**Arahan**: Jawab **TIGA** (3) soalan.]*

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

1. (a) If $x \leq y + \varepsilon$ for each positive real number ε, show that $x \leq y$.

(b) Let x be any real number.

(i) Show that there exists an integer m such that $m \leq x < m+1$.

(ii) Show that m is unique.

(c) (i) Show that the set [0, 1) is not countable.

(ii) Deduce from (i) that the set of all real numbers, R is not countable.

(iii) Determine whether the set of all irrational numbers is countable.

(d) Prove that $\sqrt{p}$ is irrational, for p prime.

(e) Prove that between any two distinct real numbers there exists an irrational number.

[100 marks]

1. (a) *Jika* $x \leq y + \varepsilon$ *untuk sebarang nombor nyata positif* ε, *tunjukkan bahawa* $x \leq y$.

(b) Biarkan x sebarang nombor nyata.

(i) Tunjukkan bahawa wujud suatu integer m yang memenuhi $m \leq x < m+1$.

(ii) Tunjukkan bahawa m adalah unik.

(c) (i) Tunjukkan bahawa set [0,1) adalah set yang terbilangkan.

(ii) Dengan mendeduksi bahagi (i), tunjukkan bahawa set semua nombor nyata, R adalah tak terbilangkan.

(iii) Tentukan sama ada set semua nombor tak nisbah adalah terbilangkan.

(d) Buktikan bahawa $\sqrt{p}$ *adalah nombor tak nisbah, untuk p nombor perdana.*

(e) Buktikan bahawa diantara dua nombor nyata terdapat suatu nombor tak nisbah.

[100 markah]

2. (a) Let $\{a_n\}$ be a Cauchy sequence. Show that $\{a_n\}$ is a convergent sequence.

(b) Let $\{a_n\}$ be a sequence in the extended real numbers.

(i) Define limit superior of $\{a_n\}$, denoted by $\overline{\lim}\, a_n$, and limit inferior of $\{a_n\}$, denoted by $\underline{\lim}\, a_n$.

(ii) Show that $\overline{\lim}\, a_n \geq \underline{\lim}\, a_n$.

(c) Let $A = (-21, 37] \cap Q$.

(i) Find the interior points of *A*.

(ii) Find the limit points of *A*.

(iii) Find the isolated points of *A*.

(iv) Find the boundary points of *A*.

(d) State and prove the Nested Interval Theorem.

(e) State the Bolzano-Weierstrass Theorem for sequences. Using this theorem, determine whether the sequence $\left\{(-1)^n\right\}$ has a convergent subsequence.

[100 marks]

2. (a) *Biarkan* $\{a_n\}$ *suatu jujukan Cauchy. Tunjukkan bahawa* $\{a_n\}$ *adalah jujukan yang menumpu.*

(b) Biarkan $\{a_n\}$ *suatu jujukan pada sistem nombor nyata yang terpeluaskan.*

(i) Takrifkan had superior bagi $\{a_n\}$, *iaitu* $\overline{\lim}\, a_n$, *dan had inferior bagi* $\overline{\lim}\, a_n$, *iaitu* $\underline{\lim}\, a_n$.

(ii) Tunjukkan bahawa $\overline{\lim}\, a_n \geq \underline{\lim}\, a_n$.

(c) Biarkan $A = (-21, 37] \cap Q$.

(i) Dapatkan titik pedalaman bagi set A.

(ii) Dapatkan titik had bagi set A.

(iii) Dapatkan titik terpencil bagi set A.

(iv) Dapatkan titik sempadan bagi set A.

(d) Nyatakan dan buktikan Teorem Selang Tersarang.

(e) Nyatakan Teorem Bolzano Weierstrass untuk jujukan. Menggunakan teorem ini, tentukan sama ada jujukan $\left\{(-1)^n\right\}$ *mempunyai subjujukan yang menumpu.*

[100 markah]

3. (a) Consider the set $S = (-32, 2] \cup [13, 21)$. Using the definition of a disconnected set, determine whether or not the set S is disconnected.

(b) Given two compact sets K_1 and K_2, show that $K_1 \cup K_2$ is compact.

(c) Given a continuous function $f : R \to R$, for $a \in R$, determine whether the set $\{x : f(x) = a\}$ is closed or open.

(d) Let $\{f_n\}$ be a sequence of functions converging uniformly on an interval I to a function f. If each f_n is continuous on I, then show that f is also continuous on I.

(e) Let $\{f_n\}$ be a sequence of functions, given by $f_n(x) = (\sin x)^n$, $n \in \mathrm{N}$, $x \in [0, \pi]$.

(i) Find the limit of $f_n(x)$.

(ii) Determine whether $f_n(x)$ converges uniformly on $[0, \pi]$.

[100 marks]

3. (a) Pertimbangkan set $S = (-32, 2] \cup [13, 21)$. *Dengan menggunakan takrifan set tak terkait, tentukan sama ada set S adalah set tak terkait.*

(b) Diberikan dua set padat K_1 dan K_2, *tunjukkan bahawa* $K_1 \cup K_2$ *adalah set padat.*

(c) Diberikan fungsi selanjar $f : R \to R$, *untuk* $a \in R$, *tentukan sama ada set* $\{x : f(x) = a\}$ *adalah tertutup atau terbuka.*

(d) Biarkan $\{f_n\}$ *suatu jujukan fungsi yang menumpu secara seragam kepada fungsi f diatas suatu selang I. Jika setiap* f_n *adalah selanjar diatas I, maka tunjukkan bahawa f adalah selanjar diatas I.*

(e) Biarkan $\{f_n\}$ *suatu jujukan fungsi-fungsi yang ditakrifkan sebagai,* $f_n(x) = (\sin x)^n$, $n \in \mathrm{N}$, $x \in [0, \pi]$.

(i) Dapatkan had bagi $f_n(x)$.

(ii) Tentukan sama ada $f_n(x)$ *menumpu secara seragam diatas* $[0, \pi]$.

[100 markah]

- ooo0ooo -