

---

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination  
2014/2015 Academic Session

June 2015

**MAT 111 - Linear Algebra**  
***[Aljabar Linear]***

Duration : 3 hours  
*[Masa : 3 jam]*

---

Please check that this examination paper consists of EIGHT pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LAPAN muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

**Instructions:** Answer **FOUR** (4) questions.

**[Arahan:** Jawab **EMPAT** (4) soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

*[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].*

1. Let the matrix  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 3 & 3 \\ -2 & -4 & 6 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ .

(a) If  $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 6 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  and  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix}$ , find an equation relating  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  and  $e$ , so that  $\mathbf{y}$  belongs to  $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$ .

- (b) Determine the reduced row echelon form of  $A$ .
- (c) Based on your result in part (b) or using any other method, find  $\det(A)$ .
- (d) Find the set of all solutions to  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , and express each solution as a linear combination of two vectors in  $\mathbb{R}^5$ .
- (e) Find the bases for the column space  $A$  and the null space of  $A$ .
- (f) State the relationship between the rank of  $A$  and the nullity of  $A$ .
- (g) Show that the null space of  $A^T$  is the orthogonal complement of the column space of  $A$  in part (e).

[ 100 marks ]

1. Andaikan matriks  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 3 & 3 \\ -2 & -4 & 6 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ .

(a) Jika  $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 6 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  dan  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix}$ ,

cari persamaan yang menghubungkan  $a, b, c, d$  dan  $e$ , supaya  $\mathbf{y}$  dipunyai oleh rentang  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$ .

- (b) Tentukan bentuk eselon baris terturun  $A$ .
- (c) Berdasarkan keputusan kamu di bahagian (b) atau dengan menggunakan sebarang kaedah lain, cari  $\det(A)$ .
- (d) Dapatkan set kesemua penyelesaian kepada  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , dan nyatakan setiap penyelesaian sebagai suatu gabungan linear dua vektor dalam  $\mathbb{R}^5$ .
- (e) Dapatkan asas-asas untuk ruang lajur  $A$  dan ruang nol  $A$ .
- (f) Nyatakan hubungan di antara pangkat  $A$  dan kenolan  $A$ .
- (g) Tunjukkan bahawa ruang nol  $A^T$  adalah pelengkap berortogon ruang lajur  $A$  dalam bahagian (e).

[ 100 markah ]

2. (a) Let  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  be defined by

$$L \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

- (i) Show that  $L$  is a linear transformation but not an isomorphism.
- (ii) Find a basis for the kernel of  $L$ .
- (iii) Extend the basis in part (ii) to obtain a basis for  $\mathbb{R}^3$ .
- (iv) Find a basis for the range of  $L$ .
- (v) Based on your result in parts (ii), (iii) and (iv), state the relationship between  $\dim \text{domain } L$ ,  $\dim \ker L$  and  $\dim \text{range } L$ .

(b) Let  $A = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -11 \\ 10 & 9 & 10 \\ -4 & -4 & -5 \end{bmatrix}$ .

- (i) Show that  $\lambda = -1$  is an eigenvalue of  $A$ . Thus, find a basis for the associated eigenspace.
- (ii) Find the characteristic polynomial of  $A$ .
- (iii) Find the other eigenvalues and associated eigenvectors of  $A$ .
- (iv) Is  $A$  diagonalizable? Explain.

[ 100 marks ]

2. (a) Andaikan  $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ditakrifkan oleh  $L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ .

- (i) Tunjukkan bahawa  $L$  adalah suatu transformasi linear tetapi bukan suatu isomorfisma.
- (ii) Dapatkan suatu asas bagi inti  $L$ .
- (iii) Kembangkan asas dalam bahagian (ii) bagi mendapatkan suatu asas untuk  $\mathbb{R}^3$ .
- (iv) Dapatkan suatu asas bagi julat  $L$ .
- (v) Berdasarkan keputusan yang anda peroleh di bahagian (ii), (iii) dan (iv), nyatakan hubungan di antara  $\dim$  domain  $L$ ,  $\dim$  inti  $L$  dan  $\dim$  julat  $L$ .

(b) Andaikan  $A = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -11 \\ 10 & 9 & 10 \\ -4 & -4 & -5 \end{bmatrix}$ .

- (i) Tunjukkan bahawa  $\lambda = -1$  adalah nilai eigen bagi  $A$ . Dengan demikian, dapatkan suatu asas untuk ruang eigen sekutuan.
- (ii) Dapatkan polinomial cirian bagi  $A$ .
- (iii) Dapatkan nilai-nilai eigen yang lain dan vektor-vektor eigen sekutu bagi  $A$ .
- (iv) Adakah  $A$  terpepenjuran? Terangkan.

[ 100 markah ]

3. (a) Let  $V$  be an  $n$ -th dimensional vector space and let  $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  be an ordered basis for  $V$ . If  $\mathbf{v} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \dots + a_n\mathbf{u}_n$  and  $\mathbf{w} = b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + \dots + b_n\mathbf{u}_n$ , be any two vectors in  $V$ ,
- (i) verify that the function  $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = ([\mathbf{v}]_S, [\mathbf{w}]_S) = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$  satisfies the properties of an inner product on  $V$ ;
  - (ii) use the definition in part (i) to find the length of  $\mathbf{v}$ ;
  - (iii) state the Cauchy-Schwarz inequality for  $V$  with the inner product defined in part (i).
- (b) Let  $W$  be the set of all  $3 \times 3$  matrices of the form  $A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & e \end{bmatrix}$ , where  $a, b, c, d$  and  $e \in \mathbb{R}$ .
- (i) Show that  $W$  is a subspace of  $M_{33}$ , a vector space of all  $3 \times 3$  matrices where the operation  $\oplus$  is the standard addition of matrices and the operation  $\odot$  is the standard multiplication of a matrix by a real number.
  - (ii) Find a basis for  $W$ . What is the dimension of  $W$ ?

[ 100 marks ]

3. (a) Andaikan  $V$  adalah suatu ruang vektor berdimensi  $n$  dan andaikan  $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  adalah suatu asas bertertib untuk  $V$ . Jika  $\mathbf{v} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \dots + a_n\mathbf{u}_n$  dan  $\mathbf{w} = b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + \dots + b_n\mathbf{u}_n$ , adalah sebarang dua vektor dalam  $V$ ,
- (i) tentu sahkan bahawa fungsi  $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = ([\mathbf{v}]_S, [\mathbf{w}]_S) = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$  memenuhi sifat-sifat hasil darab terkedalam pada  $V$ ;
  - (ii) guna takrif dalam bahagian (i) untuk mencari panjang  $\mathbf{v}$ ;
  - (iii) nyatakan ketaksamaan Cauchy-Schwarz bagi  $V$  dengan hasil darab terkedalam yang ditakrif dalam bahagian (i).
- (b) Andaikan  $W$  adalah set kesemua matriks  $3 \times 3$  berbentuk  $A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & e \end{bmatrix}$ , dengan  $a, b, c, d$  dan  $e \in \mathbb{R}$ .
- (i) Tunjukkan bahawa  $W$  adalah suatu subruang bagi  $M_{33}$ , suatu ruang vektor kesemua matriks  $3 \times 3$  dengan operasi  $\oplus$  adalah penambahan piawai matriks dan operasi  $\odot$  adalah pendaraban piawai matriks dengan suatu nombor nyata.
  - (ii) Cari suatu asas untuk  $W$ . Apakah dimensi bagi  $W$ ?

[100 markah]

4. (a) Let  $V$  be an inner product space and  $W$  a finite-dimensional subspace of  $V$  with orthonormal basis  $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ . For  $\mathbf{u}$  and  $\mathbf{v}$  in  $V$ , prove or disprove that  $\text{proj}_W(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \text{proj}_W(\mathbf{u}) + \text{proj}_W(\mathbf{v})$ .

(b) Let  $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ .

- (i) Determine whether  $S$  is a basis for  $\mathbb{R}^3$ .
- (ii) Use the Gram-Schmidt process to determine  $T$ , an orthonormal basis for  $\text{span } S$  with the standard inner product defined on it.
- (iii) Write the vector  $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$  as a linear combination of the vectors in  $T$ .
- (iv) Find  $W^\perp$ , the orthogonal complement of  $W = \text{span } S$ .

[ 100 marks ]

4. (a) Andaikan  $V$  adalah suatu ruang hasil darab terkedalam dan  $W$  adalah subruang  $V$  berdimensi terhingga dengan asas ortonormal  $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ . Bagi  $\mathbf{u}$  dan  $\mathbf{v}$  dalam  $V$ , bukti atau sangkal bahawa  $\text{proj}_W(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \text{proj}_W(\mathbf{u}) + \text{proj}_W(\mathbf{v})$ .

(b) Andaikan  $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ .

- (i) Tentukan sama ada  $S$  adalah suatu asas untuk  $\mathbb{R}^3$ .
- (ii) Guna proses Gram-Schmidt untuk menentukan  $T$ , suatu asas ortonormal bagi rentang  $S$  dengan hasil darab terkedalam piawai ditakrif padanya.
- (iii) Tulis vektor  $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$  sebagai suatu gabungan linear vektor-vektor dalam  $T$ .
- (iv) Cari  $W^\perp$ , pelengkap ortogon bagi  $W = \text{rentang } S$ .

[ 100 markah ]