UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination
2013/2014 Academic Session

December 2013/January 2014

MAT 517 – Computational Linear Algebra
[Aljabar Linear Pengkomputeran]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of **SIX** pages of printed materials before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **ENAM** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

Instructions: This examination paper contains **TWO** [2] parts.

Part A: This part contains **EIGHT (8)** questions. Answer **ALL** questions.
Part B: This part contains **TWO (2)** questions. Answer **ONE (1)** question only .

*[**Arahan:** Kertas soalan ini mengandungi **DUA** [2] bahagian.]*

*Bahagian A : Bahagian ini mengandungi **LAPAN (8)** soalan. Jawab **SEMUA** soalan.*
*Bahagian B : Bahagian ini mengandungi **DUA (2)** soalan. Jawab **SATU (1)** soalan sahaja.*

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

PART A: THIS PART CONTAINS EIGHT (8) QUESTIONS. ANSWER ALL QUESTIONS.

BAHAGIAN A : BAHAGIAN INI MENGANDUNGI LAPAN (8) SOALAN. JAWAB SEMUA SOALAN.

1. Let $\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T$ be the singular value decomposition of $\mathbf{A}$. Write down the pseudoinverse of $\mathbf{A}$ in terms of the orthogonal matrices $\mathbf{U}$ and $\mathbf{V}$, and the diagonal matrix Σ.

[10 marks]

1. Biar $\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T$ menjadi penguraian nilai singular $\mathbf{A}$. Tulis pseudosongsang $\mathbf{A}$ dalam bentuk matrik-matrik berortogon $\mathbf{U}$ dan $\mathbf{V}$, dan matriks pepenjuru Σ.

[10 markah]

2. Consider the $m \times m$ matrix $\mathbf{H} = \mathbf{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T$ where $\mathbf{u}$ is an $m \times 1$ unit vector. The matrix-vector product $\mathbf{Hx}$ for any $m \times 1$ vector $\mathbf{x}$ requires $2m+1$ number of multiplications. Hence, or otherwise, count the number of multiplications required to perform the matrix-matrix product $\mathbf{HA}$ where $\mathbf{A}$ is an $m \times n$ matrix.

[10 marks]

2. Pertimbangkan matriks $m \times m$ $\mathbf{H} = \mathbf{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T$ di mana $\mathbf{u}$ ialah suatu vektor unit $m \times 1$. Hasildarab matriks-vektor $\mathbf{Hx}$ untuk sebarang vektor $\mathbf{x}$ $m \times 1$ memerlukan $2m+1$ pendaraban. Oleh yang demikian, atau sebaliknya, kira bilangan pendaraban yang diperlukan untuk melaksanakan hasil darab matriks-matriks $\mathbf{HA}$ di mana $\mathbf{A}$ ialah suatu matriks $m \times n$.

[10 markah]

3. Given

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Find a permutation matrix $\mathbf{P}$, a unit lower triangular matrix $\mathbf{L}$, and an upper triangular matrix $\mathbf{U}$ such that $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$.

[15 marks]

3. Diberi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Cari satu matriks pilih atur $\mathbf{P}$, satu matriks segitiga bawah unit $\mathbf{L}$, dan satu matriks segitiga atas $\mathbf{U}$ sedemikian rupa sehinggakan $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$.

[10 markah]

4. Let

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Use the classical Gram-Schmidt process to find a $\mathbf{QR}$ factorization of $\mathbf{A}$ where $\mathbf{Q}$ is a matrix with orthogonal columns and $\mathbf{R}$ is an upper triangular matrix.

[15 marks]

4. Biar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Guna proses Gram-Schmidt klasikal untuk mencari pemfaktoran $\mathbf{QR}$ *bagi* $\mathbf{A}$ *di mana* $\mathbf{Q}$ *ialah satu matriks dengan lajur-lajur yang berortogon dan* $\mathbf{R}$ *ialah satu matriks segitiga atas.*

[15 markah]

5. Use Givens rotators to zero out the last row of the following matrix:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

[20 marks]

5. Guna pemutar-pemutar Givens untuk mensifarkan baris terakhir matriks berikut:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

[20 markah]

6. Use Householder reflectors to transform the following matrix into an upper Hessenberg form,

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

[20 marks]

6. *Guna pembalik-pembalik Householder untuk mentransformasikan mariks berikut kepada bentuk Hessenberg atas,*

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

[20 markah]

7. Let $\mathbf{A}$ be an $m \times n$ full rank matrix and $\mathbf{b}$ a $m \times 1$ vector with $m \geq n$. Describe a procedure for computing the least squares solution of $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, given that $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, where $\mathbf{Q}$ is a $m \times m$ orthogonal matrix and $\mathbf{R}$ is a $m \times n$ upper triangular matrix.

[10 marks]

7. *Biar* $\mathbf{A}$ *menjadi matriks pangkat penuh* $m \times n$ *dan* $\mathbf{b}$ *satu vektor* $m \times 1$ *dengan* $m \geq n$*.Huraikan satu prosedur untuk mengira penyelesaian kuasa dua terkecil bagi* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$*, diberi bahawa* $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$*, di mana* $\mathbf{Q}$ *ialah matriks berortogon* $m \times m$ *dan* $\mathbf{R}$ *ialah matriks segitiga atas* $m \times n$*.*

[10 markah]

8. Let $\mathbf{A}$ be an $m \times n$ matrix and $\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T$ is the singular value decomposition of $\mathbf{A}$. Justify the following

(a) the diagonal entries of Σ are the square roots of the eigenvalues of $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$;

(b) if rank of $\mathbf{A}$ is r such that $r \leq n$, then there exists r columns of $\mathbf{U}$ which form an orthonormal bases for the column space of $\mathbf{A}$.

[20 marks]

8. *Biar* $\mathbf{A}$ *menjadi matriks* $m \times n$ *dan* $\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T$ *ialah penguraian nilai singular bagi* $\mathbf{A}$*. Justifikasikan yang berikut,*

(a) pemasukan pepenjuru bagi Σ *ialah punca kuasa dua nilai-nilai eigen bagi* $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$*;*

(b) jika pangkat $\mathbf{A}$ *ialah* r *sedemikian rupa sehinggakan* $r \leq n$*, maka wujud sejumlah* r *lajur-lajur* $\mathbf{U}$ *yang membentuk asas ortonormal bagi ruang lajur* $\mathbf{A}$*.*

[20 markah]

PART B: THIS PART CONTAINS TWO (2) QUESTIONS. ANSWER <u>ONE (1)</u> QUESTION ONLY .

BAHAGIAN B : BAHAGIAN INI MENGANDUNGI DUA (2) SOALAN. JAWAB <u>SATU (1)</u> SOALAN SAHAJA.

9. The matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

has singular value decomposition

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/2 & -1/2 & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

(a) Let $\mathbf{b} = (6,3,3,12)^T$. Compute a least squares solution of the system $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

(b) Are there any other solution to the least squares problem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$? If there are, find all the solutions.

[30 marks]

9. Matriks

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

mempunyai penguraian nilai singular

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/2 & -1/2 & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

(a) Biar $\mathbf{b} = (6,3,3,12)^T$. Kira penyelesaian kuasa dua terkecil bagi sistem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

(b) Adakah penyelesaian-penyelesaian yang lain kepada masalah kuasa dua terkecil $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$? Jika ada, cari semua penyelesaian itu.

[30 markah]

10. Given

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Perform 2 complete iterations of the **QR** algorithm without shift on **A**.

(b) Write down the approximations of the eigenvalues of **A**.

(c) Given that the exact eigenvalues are 3 and 1. Determine the absolute errors in your results in 8b).

[30 marks]

10. Diberi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Laksanakan 2 lelaran penuh algoritma **QR** *tanpa anjakan ke atas* **A**.

(b) Tulis penghampiran kepada nilai-nilai eigen **A**.

(c) Diberi bahawa nilai tepat nilai-nilai eigen tersebut adalah 3 dan 1. Tentukan ralat-ralat mutlak dalam keputusan anda di 8b).

[30 markah]

-ooo000ooo-

+