

---

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination  
2014/2015 Academic Session

June 2015

**MAT 263 – PROBABILITY THEORY**  
***[Teori Kebarangkalian]***

Duration : 3 hours  
*[Masa : 3 jam]*

---

Please check that this examination paper consists of EIGHT pages of printed material before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LAPAN muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

**Instructions:** Answer **TEN** (10) questions.

**Arahan:** Jawab **SEPULUH** (10) soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

*[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai.]*

1. An electronic component is composed of 3 transistors, each of which is either non-defective or defective. A technician wants to observe the status of each transistor. Let the outcome be given by the vector  $(x_1, x_2, x_3)$ , where  $x_i$  is equal to 1 if transistor  $i$  is non-defective and is equal to 0 if transistor  $i$  is defective.
- (i) Specify the sample space,  $S$  of the experiment.
  - (ii) The component will function if all transistors are non-defective, or if transistors 1 and 3 are both non-defective, or if transistors 2 and 3 are both non-defective. Let  $A$  be the event that the component will function. Specify all the outcomes in  $A$ .
  - (iii) Let  $B$  be the event that transistors 1 or 2 is defective. Specify all outcomes in  $B$ .
  - (iv) Specify all the outcomes in the event  $A \cap B$ .

[20 marks]

1. Suatu komponen elektronik terdiri daripada 3 transistor, yang masing-masing sama ada tidak rosak atau rosak. Seorang juruteknik ingin memantau status setiap transistor. Biarkan kesudahannya diberikan oleh vektor  $(x_1, x_2, x_3)$ , yang mana  $x_i$  sama dengan 1 jika transistor  $i$  adalah tidak rosak dan sama dengan 0 jika transistor  $i$  rosak.
- (i) Tentukan ruang sampel,  $S$  bagi eksperimen tersebut .
  - (ii) Komponen tersebut akan berfungsi jika semua transistor tidak rosak, atau jika transistor 1 dan 3 kedua-duanya tidak rosak, atau jika transistor 2 dan 3 kedua-duanya tidak rosak. Biarkan  $A$  sebagai peristiwa komponen akan berfungsi. Tentukan semua kesudahan dalam  $A$ .
  - (iii) Biar  $B$  sebagai peristiwa yang transistor 1 atau 2 rosak. Tentukan semua kesudahan dalam  $B$ .
  - (iv) Tentukan semua kesudahan dalam peristiwa  $A \cap B$ .

[20 markah]

2. Let  $X$  be a continuous random variable with probability density function (p.d.f.) given by

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x) & , \quad 0 < x \leq 1 \\ c(x-1)^2 & , \quad 1 < x \leq 2 \\ c & , \quad 2 < x \leq 13/6 \\ 0 & , \quad \text{elsewhere.} \end{cases}$$

- (i) Determine the constant  $c$ .
- (ii) Determine the cumulative distribution function (c.d.f.),  $F(x)$ .
- (iii) If  $X_1, X_2$  and  $X_3$  are three independent observations from  $X$ , what is the probability that exactly one of these three numbers is greater than 2?

[30 marks]

2. *Biar  $X$  sebagai pembolehubah rawak selanjar dengan fungsi ketumpatan kebarangkalian (f.k.k) diberi oleh*

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x) & , \quad 0 < x \leq 1 \\ c(x-1)^2 & , \quad 1 < x \leq 2 \\ c & , \quad 2 < x \leq 13/6 \\ 0 & , \quad \text{di tempat lain.} \end{cases}$$

- (i) *Tentukan pemalar  $c$ .*
- (ii) *Tentukan fungsi taburan longgokan,  $F(x)$ .*
- (iii) *Jika  $X_1, X_2$  dan  $X_3$  ialah tiga cerapan tak bersandar daripada  $X$ , apakah kebarangkalian bahawa tepat satu daripada ketiga-tiga nombor ini lebih besar daripada 2?*

[30 markah]

3. A random variable  $X$  has a Poisson distribution with parameter  $\lambda$ . A random variable,  $Y$  also has a Poisson distribution and the probability that  $Y = i$  is given by  $P(Y = i) = P(X = i | X > 0)$ . Find  $E(Y)$ .

[20 marks]

3. *Suatu pembolehubah rawak  $X$  mempunyai taburan Poisson dengan parameter  $\lambda$ . Suatu pembolehubah rawak,  $Y$  juga mempunyai taburan Poisson dan kebarangkalian bahawa  $Y = i$  diberi oleh  $P(Y = i) = P(X = i | X > 0)$ . Dapatkan  $E(Y)$ .*

[20 markah]

4. Let  $X$  be a random variable with mean,  $\mu$  and variance,  $\sigma^2$ . The moment generating function (m.g.f.) of  $X$  is denoted by  $M_X(t)$ ,  $-\infty < t < \infty$ . Suppose  $c$  is a positive constant and  $Y$  is a random variable with m.g.f.  $M_Y(t) = e^{c(M_X(t)-1)}$ ,  $-\infty < t < \infty$ . Find the mean and variance of  $Y$  in terms of  $\mu$  and  $\sigma^2$ .

[20 marks]

4. Biarkan  $X$  sebagai pemboleh ubah rawak dengan min,  $\mu$  dan varians,  $\sigma^2$ . Fungsi penjana momen (f.p.m.) bagi  $X$  dilambangkan sebagai  $M_X(t)$ ,  $-\infty < t < \infty$ . Andaikan  $c$  suatu pemalar positif dan  $Y$  ialah suatu pemboleh ubah rawak dengan f.p.m.  $M_Y(t) = e^{c(M_X(t)-1)}$ ,  $-\infty < t < \infty$ . Cari min dan varians bagi  $Y$  dalam sebutan  $\mu$  dan  $\sigma^2$ .

[20 markah]

5. A random variable  $R$  with p.d.f. given by

$$f(r) = \begin{cases} \frac{r}{\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2} & , \quad r > 0 \\ 0 & , \text{ elsewhere} \end{cases}$$

is called a Rayleigh random variable and is said to have the Rayleigh distribution with parameter  $\sigma^2$ . Determine and identify a p.d.f. of the random variable  $Y = R^2$ .

[30 marks]

5. Pemboleh ubah rawak  $R$  dengan f.k.k. diberi oleh

$$f(r) = \begin{cases} \frac{r}{\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2} & , \quad r > 0 \\ 0 & , \text{ di tempat lain} \end{cases}$$

dipanggil pemboleh ubah rawak Rayleigh dan dikatakan mempunyai taburan Rayleigh dengan parameter  $\sigma^2$ . Dapatkan dan kenalpasti suatu f.k.k. bagi pemboleh ubah rawak  $Y = R^2$ .

[30 markah]

6. The number of power banks sold weekly at a certain shop lot is a random variable with expected value 120.

- (i) Give an upper bound of the probability that next week's sales exceed 200.
- (ii) Suppose that the variance of the number of power banks sold weekly is 40. Give a lower bound of the probability that the next week's sales are between 100 and 140.

[20 marks]

6. *Bilangan bank kuasa yang dijual di sebuah lot kedai setiap minggu adalah pembolehubah rawak dengan nilai jangkaan 120.*

- (i) *Beri batas atas kepada kebarangkalian jualan pada minggu hadapan melebihi 200.*
- (ii) *Andaikan varians bilangan bank kuasa yang dijual setiap minggu adalah 40. Beri batas bawah kepada kebarangkalian jualan pada minggu hadapan adalah antara 100 dan 140.*

[20 markah]

7. Suppose that the joint p.m.f. of random variables  $X$  and  $Y$  is given by

$$f(x, y) = \frac{2y-x}{36}, \quad x = -1, 0, 1; \quad y = 1, 2, 3.$$

- (i) Verify that  $f(x, y)$  is a joint p.m.f.
- (ii) Compute  $P(XY < 1)$ ,  $P(Y - X < 2)$  and  $P(X = 0|Y = 2)$ .

[20 marks]

7. *Andaikan f.j.k. tercantum bagi pembolehubah-pembolehubah rawak  $X$  dan  $Y$  diberi oleh*

$$f(x, y) = \frac{2y-x}{36}, \quad x = -1, 0, 1; \quad y = 1, 2, 3.$$

- (i) *Sahkan bahawa  $f(x, y)$  adalah suatu f.j.k. tercantum.*
- (ii) *Hitung  $P(XY < 1)$ ,  $P(Y - X < 2)$  dan  $P(X = 0|Y = 2)$ .*

[20 markah]

8. Suppose that  $X$  and  $Y$  are random variables. The marginal p.d.f. of  $X$  is

$$f(x) = \begin{cases} k e^{-x}, & x > 0 \\ 0 & , \text{ elsewhere.} \end{cases}$$

Also, the conditional p.d.f. of  $Y$  given that  $X = x$  is

$$h(y|x) = \begin{cases} x e^{-xy}, & y > 0 \\ 0 & , \text{ elsewhere.} \end{cases}$$

Determine

- (i) the value of  $k$ .
- (ii) the marginal p.d.f. of  $Y$ . Are  $X$  and  $Y$  independent? Justify your answer.
- (iii)  $E(Y|X = x)$ .

[30 marks]

8. *Andaikan  $X$  dan  $Y$  adalah dua pembolehubah rawak. F.k.k. sut bagi  $X$  adalah*

$$f(x) = \begin{cases} k e^{-x}, & x > 0 \\ 0 & , \text{ di tempat lain.} \end{cases}$$

*Juga, f.k.k. bersyarat bagi  $Y$  diberi  $X = x$  adalah*

$$h(y|x) = \begin{cases} x e^{-xy}, & y > 0 \\ 0 & , \text{ di tempat lain.} \end{cases}$$

*Tentukan*

- (i) *nilai  $k$ .*
- (ii) *f.k.k. sut bagi  $Y$ . Adakah  $X$  dan  $Y$  tidak bersandar? Tentusahkan jawapan anda.*
- (iii)  $E(Y|X = x)$ .

[30 markah]

9.  $X_1, X_2, \dots, X_{17}$  is a random sample of size  $n = 17$  from the normal distribution with mean 5 and variance 10. The statistics  $\bar{X}$  and  $S^2$  are defined as

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{17} X_i}{17} \quad \text{and} \quad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{17} (X_i - \bar{X})^2}{16},$$

respectively.

Find  $P(\bar{X} \geq 4, 5 < S^2 < 15)$  and  $P(5 < S^2 < 15 \mid \bar{X} \geq 4)$ .

[20 marks]

9.  $X_1, X_2, \dots, X_{17}$  ialah suatu sampel rawak bersaiz  $n = 17$  daripada taburan normal dengan min 5 and varians 10. Statistik  $\bar{X}$  dan statistik  $S^2$  ditakrifkan masing-masing sebagai

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{17} X_i}{17} \quad \text{dan} \quad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{17} (X_i - \bar{X})^2}{16}.$$

Dapatkan  $P(\bar{X} \geq 4, 5 < S^2 < 15)$  dan  $P(5 < S^2 < 15 \mid \bar{X} \geq 4)$ .

[20 markah]

10. Let  $X, Y$  be two independent standard normal random variables. Show that a random variable  $U = X/Y$  has a Cauchy distribution with p.d.f. defined as

$$f(u) = \frac{1}{\pi(1+u^2)}, \quad -\infty < u < \infty.$$

[Hint: Use an auxiliary variable,  $V$  and determine the marginal p.d.f. of  $U$  from the joint p.d.f. of  $U$  and  $V$ ,  $f(u, v)$ .]

[40 marks]

10. Biar  $X, Y$  sebagai dua pembolehubah rawak normal piawai yang tak bersandar. Tunjukkan bahawa suatu pembolehubah rawak  $U = X/Y$  mempunyai taburan Cauchy dengan f.k.k. ditakrif sebagai

$$f(u) = \frac{1}{\pi(1+u^2)}, \quad -\infty < u < \infty.$$

[Petunjuk: Gunakan pembolehubah bantu,  $V$  dan tentukan f.k.k. sut bagi  $U$  daripada f.k.k. tercantum bagi  $U$  dan  $V$ ,  $f(u, v)$ .]

[40 markah]

## Appendix

Distribution	Probability Density Function	Moment generating function
Bernoulli	$p^x(1-p)^{1-x}, \quad x=0,1, \quad 0 < p < 1$	$pe^t + q$
Binomial	$\binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}, \quad x=0,1,\dots,n, \quad 0 < p < 1$	$(pe^t + q)^n$
Hypergeometric	$\frac{\binom{n_1}{x} \binom{n_2}{r-x}}{\binom{n_1+n_2}{r}}, \quad x=0,1,\dots, r \leq n \text{ or } x=1,2,\dots, n_1 \leq r$	
Geometric	$(1-p)^{x-1} p, \quad x=1,2,\dots$	$\frac{pe^t}{1-qe^t}$
Negative Binomial	$\binom{x-1}{r-1} p^r(1-p)^{x-r}, \quad x=r,r+1,\dots$	$\left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^r$
Poisson	$\frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x=0,1,2,\dots, \quad \lambda > 0$	$e^{\lambda(e^t-1)}$
Uniform	$\frac{1}{\beta-\alpha}, \quad \alpha < x < \beta$	$\frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{(\beta-\alpha)t}, \quad t \neq 0 \quad (1, \text{ if } t=0)$
Normal	$\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad -\infty < x < \infty$	$e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$
Exponential	$\lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$	$\frac{\lambda}{\lambda-t}, \quad t < \lambda$
Gamma	$\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} (\lambda x)^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0, \quad \lambda > 0, \quad \alpha > 0$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha, \quad t < \lambda$
Chi-square	$\frac{1}{\Gamma(r/2) 2^{r/2}} x^{r/2-1} e^{-x/2}, \quad x \geq 0$	$\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{r/2}, \quad t < 1/2$
Beta	$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0$	