
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang Akademik 2003/2004

September / Oktober 2003

MSG 327 – PEMODELAN MATEMATIK

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **LIMA [5]** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab semua **tiga** soalan.

1. (a) Persamaan aliran-sebaran untuk pencemaran sungai adalah diberikan oleh

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -u \frac{\partial c}{\partial x} + E \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - kc + W. \quad (1)$$

Jika unit asas ialah kg, m, dan s, berikan unit dan maksud bagi setiap sebutan c , u , E , k dan W .

- (b) Apabila keadaan mantap tercapai, persamaan aliran-sebaran bagi pencemaran sungai di atas diringkaskan menjadi

$$E \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - u \frac{\partial c}{\partial x} - kc = 0. \quad (2)$$

Anggapkan pekali E , u dan k adalah malar

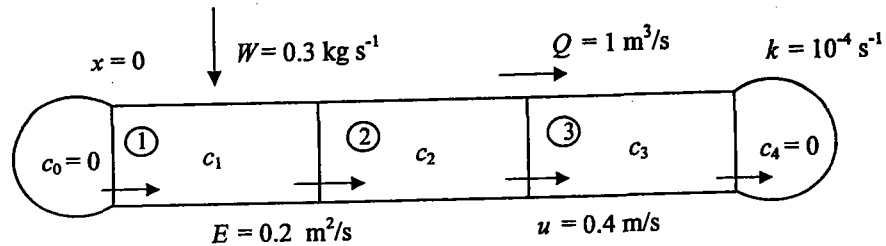
- (i) Terbitkan penyelesaian analitik

$$c(x) = \begin{cases} c_0 e^{m_1 x}, & x \leq 0 \\ c_0 e^{m_2 x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

di mana $m_1 = \frac{u}{2E}(1 + \alpha)$, $m_2 = \frac{u}{2E}(1 - \alpha)$, $\alpha = \sqrt{1 + \frac{4kE}{u^2}}$.

Terangkan apakah syarat-syarat sempadan yang sesuai, untuk penyelesaian di atas.

- (ii) Jika aliran ialah $Q \text{ m}^3/\text{s}$ dan kadar perlepasan bahan kimia ialah $W \text{ kg s}^{-1}$ pada $x = 0$, terbitkan nilai $c_0 = \frac{W}{Q\alpha}$.
- (iii) Andaikan $E = 0.2 \text{ m}^2/\text{s}$, $u = 0.4 \text{ m/s}$, $Q = 1 \text{ m}^3/\text{s}$, $k = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ dan $W = 0.3 \text{ kg s}^{-1}$. Cari c_0 dan $c(x)$. Lakarkan $c(x)$, untuk $x \in (-\infty, \infty)$.
- (iv) Dapatkan anggaran nilai untuk setiap sebutan dalam persamaan pembezaan (2) di atas untuk $x \geq 0$ dan $x \leq 0$ masing-masing.
- (c) Berasaskan butir-butir di atas, kita selesaikan (2) bahagian 1(b) melalui kaedah berangka dengan 3 segmen seperti tertunjuk berikut, untuk $x \geq 0$.



Anggapkan panjang setiap segmen ialah $\Delta x = 2000$ m, dan $c_0 = 0$, $c_4 = 0$.

Bentukkan sistem (3×3) untuk masalah ini dan selesaikan. Bandingkan dengan jawapan di bahagian (1b) di atas.

Adakah pilihan $\Delta x = 2000$ m, dan $c_0 = c_4 = 0$ sesuai?

- (d) Terbitkan persamaan (1). Terangkan dengan jelas anggapan sesuai yang dikenakan.
2. (a) Misalkan suatu bahan organik terlarut (BOD) di dalam satu kolam kecil dengan kepekatan l mg/l, (0_2) yang merosot nilainya mengikut kadar linear berikut

$$\frac{\partial l}{\partial t} = -\alpha l, \quad l(0) = l_0. \quad (3)$$

Di samping ini oksigen terlarut (DO) dalam kolam itu c mg/l O_2 akan berubah mengikut

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \beta(c_s - c) - \alpha c, \quad c(0) = c_0 \quad (4)$$

di mana β ialah kadar pengudaraan semula dan c_s pemalar ketepuan bagi oksigen terlarut c .

Selesaikan (3) untuk l terlebih dahulu dan kemudian selesaikan (4) untuk c .

Jika $l_0 = 18$ mg/l, $c_0 = 6$ mg/l, $c_s = 9$ mg/l, $\alpha = 0.5$ sehari dan $\beta = 0.8$ sehari, dapatkan l dan c . Lakarkan l dan c di rajah yang sama, untuk $x \in [0, \infty)$.

- (b) Sekarang persamaan (3) di atas diubahsuai kepada

$$\frac{\partial l}{\partial t} = -\alpha l + \gamma \sin(b t), \quad l(0) = l_0 \quad (5)$$

di mana γ dan b adalah pemalar. Persamaan (4) dikekalkan. Apakah maksud dan dimensi bagi γ ?

Selesaikan (5) untuk mendapatkan l . Masukkan l ini ke dalam (4) dan selesaikan (4) untuk c .

...4/-

Jika $\gamma = 0.5 \text{ mg}/\ell/\text{hari}$, dan $b = 0.0172142/\text{hari}$, dan parameter-parameter lain di dalam (4) dan (5) dikekalkan seperti di atas, selesaikan dan lakarkan ℓ dan c pada rajah yang sama, dengan menunjukkan kelakuan penyelesaian apabila $t \rightarrow \infty$.

3. (a) Andaikan unit asas ialah kg, m dan s. Terbitkan persamaan keabadian

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \quad (6)$$

bagi suatu saluran dengan luas keratan rentas $A \text{ m}^2$, aliran air $Q \text{ m}^3/\text{s}$, $t = \text{masa (s)}$, $x = \text{jarak (m)}$. Seterusnya terbitkan persamaan gelombang tulen.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

bagi suatu saluran seragam dengan $u = \text{halaju air}$ dan $\eta = \text{paras air atas paras purata}$. Terangkan dengan jelas anggapan-anggapan yang sesuai untuk model di atas serta maksud dan unit g dan h .

- (b) Tunjukkan bahawa (7) dan (8) boleh diturunkan kepada bentuk persamaan gelombang berikut:

$$\omega_{\eta} = c^2 \omega_{xx} \quad (9)$$

untuk u dan η masing-masing. Apakah unit dan nilai c^2 ?

Sahkan bahawa

$$\eta = a \sin(\sigma t - kx) \quad (10)$$

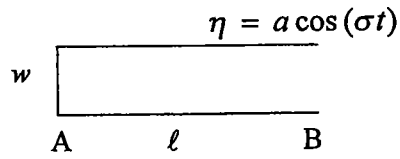
$$u = a \sqrt{\frac{g}{h}} \sin(\sigma t - kx) \quad (11)$$

ialah suatu penyelesaian dengan $\sigma^2 = ghk^2$. Apakah maksud dan unit bagi σ dan k ?

- (c) Suatu saluran seragam adalah terbuka kepada pasang surut berkalaan 12.00 jam pada kedua-dua hujung. Biarkan dalaman purata 12m, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Dapatkan dan lakarkan η dan u pada rajah yang sama jika amplitud pasang surut ialah 1.0 m. Apakah frekuensi dan panjang gelombang pasang surut ini?

...5/-

- (d) Misalkan suatu saluran seragam berbentuk segi empat dengan hujung A ditutup dan hujung B terbuka ke pasang-surut $\eta = a \cos(\sigma t)$ m. Biarkan ℓ m = panjang saluran, w m = lebar, d m = dalaman purata, di mana $a \ll d$.



Dapatkan aliran $Q(t)$ m³/s dan halaju $u(t)$ m/s pada hujung B. Biarkan $\ell = 20000$ m, $w = 1200$ m, $d = 15$ m, $a = 1.00$ m dan $\sigma = 2\pi/T$ di mana $T = 12$ jam. Cari $Q(t)$ dan $u(t)$.

- oooOooo -